

⁴⁶
Oecon.

316ⁱ



Dec 376

P

F o r s t - F r a g e n

als

E n t w i c k e l u n g e n u n d B e y t r ä g e

z u r

Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehaue

gemeinschaftlich bearbeitet

von

K a r l F r i e d r i c h S c h e l l i g

Premierlieutenant im Chursächs. Ingenieur-Corps und öffentlichem Lehrer der Mathematik und der Kriegswissenschaften an der Ingenieur-Academie in Dresden

und von

J o h a n n B e n j a m i n M a r k e n d o r f

Adjunct am Salzwerke Teuditz.

Leipzig, 1799.

gedruckt bey Breitkopf und Härtel,

für

C. F. W. Erbstein in Meissen.

Forrest - 1270

Ernstwickenburg

Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehölze

gemeinschaftlich beabsichtigt

NOV

Richard Henry Stoddard

mann und der Kriegswissenschaften an der Ingenieur-Schule in Dresden
 Truppendirektor im Chursächsischen Ingenieur-Corps und Adjutant des Leiters der Militär-

209. 57711

Johann Benjamin Warkentin

Alfred Edwards and Joseph A.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

1790. 1800.

gezeichnet von B. J. J. J.

701

C. I. W. Epstein in Mission

An

H e r r n

H o f r a t h K ä s t n e r

i n G ö t t i n g e n

und

H e r r n

P r o f e s s o r H i n d e n b u r g

i n L e i p z i g

An

Herrn

Hofrath Kästner

in Göttingen

und

Herrn

Professor Hindenburg

in Leipzig

Verehrungswerthe Männer

Nehmen Sie doch dieses kleine Denkmahl grosser Verehrung und des aufrichtigsten Dankes für Ihren Unterricht, als ein williges Opfer, so, wie es in unsern Kräften steht, an.

Die Verfasser.

Verehrungswerthe Männer

Nehmen Sie doch dieses kleine Denkmal großer Verehrung
und des aufrichtigsten Dankes für Ihren Unterricht, als ein
williges Opfer, so, wie es in unsern Kräften steht, an.

Die Verfasser

V o r r e d e.

Der vormahlige Berghauptmann von Oppel hat ohne Nennung Namens und Orts, folgende Schrift in 4. 1760. drucken lassen: Die Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehäue, eine Rechnungsaufgabe [siehe Hrn. Hofr. Kästners Rechenkunst der mathem. Anfangsgr. Th. I. Abth. 2. Seite 196]. Von dieser Abhandlung ist eine neue unveränderte Auflage im Jahr 1791. in der Waltherschen Hofbuchhandlung in Dresden erschienen. Bey Anzeige derselben, in der Jen. Lit. Zeitung, hält es der Recensent noch der Mühe werth, zu einer Umarbeitung dieser Schrift aufzumuntern. Da aber dieses Werk, wegen irgend eines Forstauftrags, berei's schon vor zehen Jahren den gegenwärtigen Bearbeitern eigene Belehrung war, und sie fortfuhren, ihre gegenseitigen Gedanken darüber schriftlich sich einander mitzutheilen, so entstand gegenwärtiger Versuch, der den Besitzern der v. Oppelschen Abhandlung um so bequemer zu Erläuterungen dienen kann: indem man hier nicht allein die $\S$ phen jener Abhandlung, in eine Parenthese geschlossen, am Rande beygebracht, sondern auch alle Auflösungen dergestalt entwickelt hat, daß der Uebergang von einem Ausdrücke zum andern, verständlich und am Ende doch elegant genug dargestellt ist.

Einige, im mehrbenannten v. Oppelschen Werke, aufgefundene Druck- und Rechnungsfehler kann man nach den Formeln G , ${}^1R$, ${}^2R$, ${}^3S$ und nach No. XXXIII. verbessern.

Man findet hier die Inductionsbeweise der Formel A nach der Methode des Hrn. Hofraths Kästner vollständig ausgeführt, so wie diese Beweisart auch Hr. Prof. Pasquich im ersten Bande seines Unterrichts in der mathem. Analysis umständlich auseinander gesetzt hat.

Die Formeln A bis H sind eigentlich noch nicht zum Rechnen geschickt, sondern nur als Grundlage der darauf folgenden Formeln anzusehen; man wird daher Formel I als die erste Rechnungsformel betrachten können.

No. XVII. ist durch Hinzufügung der Formeln ${}^1W$ bis mit ${}^6N$ zu einer kleinen Abhandlung allein angewachsen, die alle vorkommende Fälle enthält, und eigentlich eine Ausdehnung der No. X. bis XV. ist. Eben so haben No. XXV. und mehrere, beträchtliche Erweiterungen erhalten.

In No. XXVI. sind die v. Oppelschen Anwendungen erklärt und dabey gezeigt worden, wie man noch kürzer zu seinem Zweck gelangen könne.

Rechnungsliebhabern ist in der neuhinzugefügten Aufgabe No. XXXII. noch eine Forderung zu entwickeln übrig gelassen worden, näm-

lich: nach wie viel Holzschlägen wird, unter dortigen Umständen, der alte Forst ganz abgeholzet und der neue an dessen Stelle getreten seyn?

No. XXXIII. ist eine Anwendung der, im §. 52. des v. Oppelschen Werks, mitgetheilten Tabelle gezeigt worden, deren Gebrauch nach der dort gegebenen Anleitung nicht statt findet.

Das Uebrige, was hinzugekommen ist, werden Kenner in dieser Schrift selbst finden, und hoffentlich werden diese auch die gemachten Erinnerungen, als eine nothwendige Folge der vorgehabten Arbeit, keinesweges aber als Tadel gegen den berühmten und längst verewigten Hrn. Verfasser ansehen.

Nächst dem bleibt uns noch übrig, denen, die sich wegen Mangel eines mündlichen Unterrichts gern in den ersten Gründen der Forst-Mathematik durch eigenen Fleiß unterrichten möchten, folgenden Weg anzurathen: Sie werden wohl thun, wenn sie, nach F. Ch. L. Karstens Rechenkunst, die ersten beyden Theile von Häselers Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie und Trigometrie, 2te Aufl. fleissig durchstudieren und mit Winklers Anfangsgründen der Arithm. und Geom. vom Prof. Weinert aufs neue bearbeitet, verbinden, worinne sich schon kleine Forstanwendungen befinden. Ein hinlänglicher Fleiß wird ihnen vielleicht bald die angenehme Belohnung geben, sich im Stande zu sehen, die zu Hrn. Prof. Dägels vortreflichem Handbuche für junge Förster, erforderliche Theorie selbst ergänzen und zu schwerern Forstbüchern

übergehen zu können, die man hinlänglich aus Herrn Prof. Möyers praktischer Geometrie 2te Aufl. kennen lernt.

Der vorliegende Versuch sollte endlich ein Werb-Mittel abgeben, der von Oppelschen Schrift geneigtere Leser zu verschaffen, und man wird die gehabte Mühe nicht achten, wenn man seine Absicht nur einigermaassen erreicht haben sollte. Man könnte auch daher, wegen des Tittels: Forst-Fragen, ganz entübrigt seyn, etwas über den Plan dieser Schrift weiter zu sagen, nur so viel: dafs jede andere Gestalt der Bearbeitung uns zu weit vom vorgesezten Ziele abgeleitet haben würde, weil man doch in den Erläuterungen die nämliche Ordnung der Sphen des oft angezeigten v. Oppelschen Werks beybehalten mußte, um deutlich zu bleiben. Inzwischen wird man jeden Wink und jede Zurechtweisung mit dem aufrichtigsten Danke annehmen. Mathematische Wissenschaften haben das ausschliesslich eigenthümliche Vorrecht, den Fehlenden an die Quelle seines Irrthums zurückzuführen, und dieses bleibt dem, der sich zu unterrichten wünscht, immer kein gleichgültiger Gewinn, der auch noch seinen Werth behält, geschähe diese Zurechtweisung auch nicht gerade in dem gefälligsten Vortrage.

Wahrheit bleibt im häfslichsten Gewande schön, und nie sollten Leute, denen schon einigermaassen Wohl und Weh anderer Menschen anvertraut ist, an ihr bankerot werden; noch weniger sollten sie mit diesem anvertrauten Gute Spielwerk treiben! Der Aufmunterung allein wegen, darf sich ohnedieß niemand auf Wissenschaften legen, man

thäte unserm aufgeklärten Zeitalter zu viel: wer sich nicht überwinden kann mit krummen Rücken beliebigenfalls Ja statt Nein, und umgekehrt zu sagen, ist nur allein fähig, mit dem sich belohnt zu fühlen, was wissenschaftliche Bemühungen gewähren können. Die Gefälligkeit geht aber im praktischen Menschenleben oft nur zu weit, so z. B. bedarfs nur eines Winks voll Zufriedenheit, den ein Höherer einem grün gekleideten Manne, kaum aus zufälliger Laune, zuwirft, so ist man gleich bereit, es auf die hohen Forstkenntnisse und, wer weiß, was noch zu deuten; Eine spätere und kleine Erfahrung zeigt aber oft, dafs beyde zugleich ganz unschuldig in diesen Verdacht kamen, und dafs es Verhältnisse in der Welt giebt, die weit geschwinder gelitten machen, und Empfehlung verschaffen, als solide Kenntnisse.

Doch wer nicht überzeugende Beweise in Händen hat, dafs das Vernünftige grade den wenigsten Beyfall findet, muß nicht so ungallant seyn und eine artige Welt durch Paradoxe zu Pedantereyen verleiten wollen!

Man will auch hiermit nur so viel sagen: Keine Verbindung fesselt so, dafs man ihr Menschenwürde aufopfern müsse, im Gegentheil verdient jeder den Blick der Verachtung, der nicht bieder ist, hätte ihn auch der Zufall bis in den ersten Rang verschoben. Wer da weiß, wie nahe oft diese und jene Ideen mit einander Verwandtschaft erhalten, wird hoffentlich diese kleine Ableitung verzeihen.

Sollte schliesslich vorliegende Bemühung auch nur entfernt zu Verbreitung nützlicher Kenntnisse mitwirken, so können mehrere unserer gemeinschaftlichen literarischen Vergnügungen nachfolgen; in so ferne nämlich Dienst und Berufsgeschäfte die erforderliche Zeit dazu erlauben werden.

Dresden, im Januar 1797.

N a c h s c h r i f t.

Hindernisse, die hier anzuführen nutzlos wären, hat der Hr. Verleger endlich dadurch überwunden, daß die Forst-Fragen nun langsam ihrem Urtheile sich nahen.

Die erste Veranlassung ihrer Entstehung war, eine Eintheilung der Gehölze in Flächengehaue auf dem Gräfl. Stollbergischen Rittergute Räckelwitz in der Ober-Lausitz. Während und nach dieser kleinen praktischen Ausführung war eine Zeitlang Lieblingslectüre, was nur in's Forst-Fach schlug, und so geschahe denn auch die Bekanntschaft mit dem Werke, die Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehaue. Diese Abhandlung wurde endlich der Gegenstand unsrer schriftlichen Unterhaltung, wenn Dienstgeschäfte mich von hier trennten, und so entstanden nach und nach die Forst-Fragen. Ihr Loos werde also, welches nur es wolle, so werden sie uns immer an eine angenehme, frohe und belehrende Unterhaltung erinnern! Nächstdem ist in dem Zeitraume zwischen der Vorrede und dieser Nacherinnerung auch meinem Freunde ein fester Beruf zu Theil worden, so, wie ich während dieser Zeit meinen Lehr-Posten übernommen habe, der, mich meines Orts, fühlbar genug erinnert, daß das, was ehemals der Lieblingsneigung nachzusehen war, nun einer gewissen Erwartung entsprechen soll. Allein, kann ein Versuch, seine Gedanken über etwas öffentlich vorzutragen, irgend zu eigener Belehrung dienen, so ist es an meinem jetzigen Platze wohl unerlaßliche Pflicht, die öffentliche Meinung zu berathen. Wer nun einmal den Beruf hat, oft allein zu sprechen, kann müde werden oder

in Versuchung gerathén, sich gerne zu hören; aber beydes dürfte, meines Erachtens, nachtheilige Folgen haben.

Das Ingenieur - Wesen hatte ohnedem noch kürzlich das Glück oder Unglück, entweder gar nicht gekannt oder doch verkannt zu werden. Und wenn man auch jezt damit einiger ist, daß der eigentliche Ingenieur ein vom blossen Feld-Messer unterschiedenes Wesen ist, so wie die Zeitgeschichte noch bis jezt die Mühe selbst übernimmt: Recepte, Ingenieurs zu brauchen, auszufertigen, so bleibt es doch gewiß, daß eine Wissenschaft, die so viel Anstrengung und Ernst fordert, und doch nicht einmal von jedem sich gut — spielen läßt, nie aus der grossen, sondern aus der weit kleinern denkenden Menge, ihre Verehrer hoffen darf.

Der Ingenieur siehet sich also zeitig nothgedrungen zu unterscheiden, wo ein Durchschlagen einzig zum Ziele führet, oder wo eine durchdachte Demonstration weit sicherer so viel Terrain und Zeit zu gewinnen hoft, als gerade nöthig ist, sich nicht ganz auf Discretion ergeben zu dürfen!

Zum Glück scheint Gefühl für das Grofse und Erhabene sich eben so sicher zu treffen, wie im entgegengesetzten Falle, Kopflosigkeit und böser Wille epidemisch sich auffinden; So habe ich während meines vieljährigen Privat-Unterrichts bemerken können, daß der junge Mensch, dessen Fähigkeit und gutes Herz durch zweckwidrige Bildung nicht gelitten hat und durch Erfahrung und Menschenkenntniß, das ist, durch übles Beyspiel nicht getäuscht und mistrauisch gemacht worden ist, einst wider seinem Willen, von sich selbst, fürs Ingenieur - Corps rekrutirt wurde.

Der Anlaß: die Zweckmäßigkeit der gesamten Waffen, ihren Gebrauch und wechselseitige Unterstützung und dadurch das eigentliche Leben und die Kraft einer ganzen Armee nach unumstößlichen und wohlgeordneten Grundsätzen berechnen, schätzen und beurtheilen zu lernen; die unablässigen Uebungen, Hindernisse zu besiegen und das vorgesteckte Ziel nach festen Regeln und Gesetzen zu erreichen und gleichsam der Natur das abzutrotzen, was sie abzugewinnen sich weigern will; der Auftrag der Zeitumstände, hie eine ausgetretene Politik in die Ufer der gesunden Vernunft zurück drängen zu sehen, dort ein natürlicheres A, B, C des Natur- und Völker-Rechts zu begründen, wo vielleicht Vorurtheile und Schlendrian das Fortschreiten des menschlichen Geistes belagert halten und kommenden Generationen schädlich werden könnten; Vergleichen zwischen Situation und Collisionen anstellen, die den Ort bezeichnen, wo Hunderte stürzen müssen, um Tausenden ein besser Schicksal zu geben.

Diese und ähnliche Ansichten lehren den angehenden und gutmüthigen Denker schon früh seine Abstracta machen und feuern ihn an, da Gefahren nicht zu scheuen, wo es darauf ankommt, dem Vaterlande durch seinen Tod zu nützen.

Eben so bekommt ein ähnliches Verhalten, nach dem die Bahn von Tod und Verderben berechnet wird, für Schiffahrt und Handlung einen weit angemessnern und nützlicheren Wirk-Kreis. Und wie mancher erlaubte Schluß läßt sich nicht aus unsrer gegenwärtigen Bestimmung in eine andere Periode unsres künftigen Seyns — hinüberträumen, die der jugendlichen Wisbegierde oft mehr gilt, als man ihr gemeiniglich zutrauet!

Nach wie viel Seiten läßt sich aber der Ingenieur-Beruf, für allgemeine Nützlichkeit nicht noch entwickeln! wird sich der Ingenieur

wohl weniger gnügeleistend fühlen, wenn er vielleicht durch Aufsuchung neuer Landesproducte; durch Emporbringung noch nicht gangbarer Gewerbe und Handthierungen — sinkende Grenz-Provinzen ihrem Fall entreißt oder stockendem Manufacktur- und Fabrik-Wesen hie und da ein Rad einpafst, wodurch das Ganze wieder schwunghafter wird oder in bessern Umtrieb kommt.

Doch dieser rohe unvollkommene Abrifs des heutigen Ingenieur-Berufs soll ja nur die Thätigkeit bezeichnen, die dem jugendlichen Bestreben, einst nützlich zu werden, so natürlich, so nahrhaft ist.

Möge man sich hiebey doch erinnern, dafs der Muth und der Eifer, durch Nachtwachen und Aufopferungen aller Art brauchbar und nützlich zu werden, manchmal auch eine etwas gröfsere Aufmunterung verdienen, als — blosses Oel und eine Lampe — gewähren können.

Dresden im März, 1799.

K. F. Schellig.

Ein Wald, der in jährliche Gehaue eingetheilt werden soll, enthalte nach vorhergegangener Taxation b Scheitklaftern; man weiß, daß in Klaftern stehendes Holz jährlich 1 Klafter Zuwachs erhalten; g sey die Anzahl der Klaftern, welche man so gleich von b abtreiben will und dann nach Ablauf eines jeden Jahres gefällt werden soll. Man sucht den verbleibenden Waldbestand nach jedem jährlichen Holzschlage.

Auflösung.

Nach dem ersten Holzschlage verbleibt ein Waldbestand

$$= b - g, (a.)$$

Dessen Zuwachs oder Nachwuchs bis zum zweyten Holzschlage ist

$$= \frac{b - g}{m}. (b.)$$

Der vor diesem zweyten Schlage vorhandene Waldbestand ist

$$= a + b$$

$$= b - g + \frac{b - g}{m}$$

$$= \frac{m \cdot (b - g) + (b - g)}{m}$$

$$= \frac{(m + 1) \cdot (b - g)}{m}$$

Der nach dem zweyten Holzschlage verbleibende Waldbestand ist

$$= \frac{(m + 1) \cdot (b - g)}{m} - g$$

$$= \frac{(m + 1) \cdot (b - g) - mg}{m}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{mb - mg + b - g - mg}{m} \\
&= \frac{-2mg - g + mb + b}{m} \\
&= \frac{m^2 \cdot g - m^2 g - 2mg - g + mb + b}{m} \\
&= mg - \left(\frac{m^2 g + 2mg + g - mb - b}{m} \right) \\
&= mg - \left[\frac{(m^2 + 2m + 1)g - (m + 1)b}{m} \right] \\
&= mg - \left[\frac{(m + 1)^2 \cdot g - (m + 1)b}{m} \right] \\
&= mg - (m + 1) \cdot [(m + 1)g - b] : m \quad (c)
\end{aligned}$$

Hiervon ist der Zuwachs bis zum dritten Holzschlage

$$\begin{aligned}
&= \frac{mg - (m + 1) \cdot [(m + 1)g - b] : m}{m} \\
&= g - (m + 1) \cdot [(m + 1)g - b] : m^2; \quad (d)
\end{aligned}$$

Daher ist der vor dem dritten Schlage vorhandene Waldbestand

$$\begin{aligned}
&= c + d \\
&= mg + g - \frac{(m + 1) \cdot [(m + 1)g - b]}{m} - \frac{(m + 1) \cdot [(m + 1)g - b]}{m^2} \\
&= mg + g - \frac{m \cdot (m + 1) \cdot [(m + 1)g - b]}{m^2} - \frac{(m + 1) \cdot [(m + 1)g - b]}{m^2} \\
&= mg + g - \frac{m \cdot (m + 1) \cdot [(m + 1)g - b] + 1 \cdot (m + 1) \cdot [(m + 1)g - b]}{m^2} \\
&= mg + g - \frac{(m + 1)(m + 1) \cdot [(m + 1)g - b]}{m^2} \\
&= mg + g - (m + 1)^2 \cdot [(m + 1)g - b] : m^2;
\end{aligned}$$

Nach dem dritten Holzschlage verbleibt demnach ein Waldbestand

$$= mg - (m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b] : m^2, \quad (e)$$

Dessen Zuwachs bis zum vierten Schlage ist

$$= \frac{mg - (m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b] : m^2}{m}$$

$$= g - (m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b] : m^3. \quad (f)$$

Also ist der vor dem vierten Holzschlage vorhandene Waldbestand

$$= e + f$$

$$= mg + g - \frac{(m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b]}{m^2} - \frac{(m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b]}{m^3}$$

$$= mg + g - \frac{m \cdot (m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b]}{m^3} - \frac{(m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b]}{m^3}$$

$$= mg + g - \frac{m \cdot (m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b] + 1 \cdot (m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b]}{m^3}$$

$$= mg + g - \frac{(m+1) \cdot (m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b]}{m^3}$$

$$= mg + g - (m+1)^3 \cdot [(m+1)g - b] : m^3,$$

nach dem vierten Holzschlage verbleibt demnach ein Waldbestand

$$= mg - (m+1)^3 \cdot [(m+1)g - b] : m^3. \quad (g)$$

Bei geringer Aufmerksamkeit auf die Formeln c , e , g , welche die Waldbestände nach dem zweyten, dritten und vierten Holzschlage ausdrücken, und nur in Rücksicht der in ihnen vorkommenden Exponenten von einander verschieden sind, kann man nun schon aus dem in ihnen liegenden Gesetze schliessen, daß der nach irgend einem Holzschlage verbleibende Waldbestand

$$V = mg - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b] : m^{x-1}$$

A.

seyn werde, wenn x die Anzahl der vorhergegangenen Holzschläge bedeutet.

Die Gültigkeit dieser Formel, welche nun schon für $x = 1$ bis $x = 4$ erwiesen ist, darf jedoch nicht eher für allgemein angenommen werden, bis man weiß, daß in der daraus hergeleiteten Formel für den Waldbestand nach dem $(x+1)$ ten Schlage

noch eben das Gesetz liegt, oder dafs der nach dem $(x+1)$ ten Holzschlage verbleibende Waldbestand $= mg - (m+1)^x \cdot [(m+1)g - b] : m^x$ sey, welche Formel aus A entsteht, wenn man in sie $x+1$ statt x setzt. Denn, wenn dies erwiesen ist, so gilt die Formel A , da sie für $x=1$ bis $x=4$, wie aus obiger Induction erhellet, wahr ist, auch für $x=5$; und da sie nun für $x=5$ gilt, so gilt sie auch noch für $x=6$ und so fort für alle folgende Waldbestände. Dies kann nun durch folgenden Schluß entschieden werden:

Wenn der nach dem x ten Holzschlage verbleibende Waldbestand V

$$= mg - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b] : m^{x-1}; \quad (h)$$

so ist dessen Zuwachs bis zum $(x+1)$ ten Schlage

$$= \frac{mg - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b] : m^{x-1}}{m}$$

$$= g - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b] : m^x; \quad (i)$$

folglich der vor dem $(x+1)$ ten Schlage vorhandene Waldbestand

$$= h + i$$

$$= mg + g - \left[\frac{(m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b]}{m^{x-1}} - \frac{(m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b]}{m^x} \right]$$

$$= mg + g - \left[\frac{m \cdot (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b]}{m^x} + \frac{1 \cdot (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b]}{m^x} \right]$$

$$= mg + g - (m+1)^x \cdot [(m+1)g - b] : m^x;$$

also der nach dem $(x+1)$ ten Schlage verbleibende Waldbestand

$$= mg - (m+1)^x \cdot [(m+1)g - b] : m^x,$$

wie vorausgesetzt wurde, und hierdurch hat nun die Formel A ihre völlige Allgemeinheit erhalten.

[§. 4.]

Andere Auflösung.

Zu der allgemeinen Formel

$$V = mg - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b] : m^{x-1} \quad (A.)$$

gelangt man auch auf folgende Art:

Es ist der nach dem ersten Holzschlage verbleibende Waldbestand

$$= b - g.$$

Dessen Zuwachs bis zum zweyten Schlage

$$= \frac{b - g}{m};$$

Der vor dem zweyten Schlage vorhandene Waldbestand

$$= \frac{(m+1) \cdot (b - g)}{m}$$

Der nach dem zweyten Schlage verbleibende Waldbestand

$$\begin{aligned} &= \frac{(m+1)(b-g)}{m} - g \\ &= \frac{(m+1) \cdot (b-g) - mg}{m}; \quad (a) \end{aligned}$$

Dessen Zuwachs bis zum dritten Schlage

$$= \frac{(m+1) \cdot (b-g) - mg}{m^2} \cdot (b)$$

Der vor dem dritten Holzschlage vorhandene Waldbestand

$$\begin{aligned} &= a + b \\ &= \frac{(m+1) \cdot (b-g) - mg}{m} + \frac{(m+1) \cdot (b-g) - mg}{m^2} \\ &= \frac{m \cdot [(m+1)(b-g) - mg]}{m^2} + \frac{1 \cdot [(m+1)(b-g) - mg]}{m^2} \\ &= \frac{(m+1)[(m+1)(b-g) - mg]}{m^2} \\ &= \frac{(m+1)^2(b-g) - m \cdot (m+1)g}{m^2}. \end{aligned}$$

Der nach dem dritten Holzschlage verbleibende Waldbestand

$$\begin{aligned} &= \frac{(m+1)^2 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1) \cdot g}{m^2} - g \\ &= \frac{(m+1)^2 \cdot (b-g) - m(m+1)g - m^2 \cdot g}{m^2}; \quad (c) \end{aligned}$$

Dessen Zuwachs bis zum vierten Schlage

$$= \frac{(m+1)^2 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)g - m^2 \cdot g}{m^3} \cdot (d)$$

Der vor dem vierten Holzschlage vorhandene Waldbestand

$$= c + d$$

$$= \frac{(m+1)^2 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)g - m^2 \cdot g}{m^2} + \frac{(m+1)^2 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)g - m^2 \cdot g}{m^3}$$

$$= \frac{m[(m+1)^2 \cdot (b-g) - m(m+1)g - m^2g]}{m^3} + \frac{1 \cdot [(m+1)^2 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)g - m^2g]}{m^3}$$

$$= \frac{(m+1) \cdot [(m+1)^2 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)g - m^2g]}{m^3}$$

$$= \frac{(m+1)^3 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)^2 \cdot g - m^2 \cdot (m+1)g}{m^3}$$

und der nach dem vierten Holzschlage verbleibende Waldbestand

$$= \frac{(m+1)^3 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)^2 \cdot g - m^2 \cdot (m+1)g}{m^3} - g$$

$$= \frac{(m+1)^3 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)^2 \cdot g - m^2 \cdot (m+1)g - m^3g}{m^3}$$

Führt man mit dieser Induction so fort, so findet man den Waldbestand nach dem fünften Schlage

$$= \frac{(m+1)^4 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)^3 \cdot g - m^2 \cdot (m+1)^2g - m^3(m+1)g - m^4g}{m^4}$$

und den Waldbestand nach dem sechsten Schlage

$$= (m+1)^5 \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)^4g - m^2(m+1)^3g - m^3 \cdot (m+1)^2g - m^4(m+1)g - m^5g.$$

Nun wollen wir untersuchen, ob das Gesetz, welches man in den hier nach den ersten sechs Holzschlägen verbleibenden Waldbeständen entdeckt, durchgängig für alle übrige Waldbestände gültig seyn wird; dies Gesetz für den nach dem x ten Holzschlag verbleibenden Waldbestand beibehalten, und daher diesen Waldbestand =

$$V = \frac{(m+1)^{x-1}(b-g) - m \cdot (m+1)^{x-2} \cdot g - m^2(m+1)^{x-3} \cdot g - \text{etc.} - m^{x-3}(m+1)^2g - m^{x-2}(m+1)g - m^{x-1}g}{m^{x-1}}$$

setzen, so wird dessen Zuwachs bis zum $x+1$ ten Holzschlage

$$= \frac{V}{m};$$

der Waldbestand vor dem $(x+1)$ ten Schlage

$$= V + \frac{V}{m} = \frac{mV + V}{m} = \frac{(m+1)V}{m}$$

und also der verbleibende Waldbestand nach dem $(x+1)$ ten Schlage

$$= \frac{(m+1)V}{m} - g$$

$$= \frac{(m+1)^x \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)^{x-1} \cdot g - m^2 \cdot (m+1)^{x-2} \cdot g - \text{etc.} - m^{x-2} \cdot (m+1)^2 g - m^{x-1} \cdot (m+1) g}{m^x} - g$$

$$= \frac{(m+1)^x \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)^{x-1} g - m^2 (m+1)^{x-2} g - \text{etc.} - m^{x-2} \cdot (m+1)^2 g - m^{x-1} \cdot (m+1) g - m^x g}{m^x}$$

Da man nun in dieser Formel für den verbleibenden Waldbestand nach dem $(x+1)$ ten Schlage noch eben das Gesetz findet, wie in V , und V für die ersten sechs Waldbestände für richtig befunden wird, so gilt das in V enthaltene Gesetz für alle verbleibende Waldbestände. Aus

$$V = \frac{(m+1)^{x-1} \cdot (b-g) - m(m+1)^{x-2} \cdot g - m^2(m+1)^{x-3} \cdot g - \text{etc.} - m^{x-2}(m+1)g - m^{x-1} \cdot g}{m^{x-1}}$$

wird aber

$$\begin{aligned} m^{x-1} \cdot V &= (m+1)^{x-1} \cdot (b-g) - m \cdot (m+1)^{x-2} \cdot g - m^2(m+1)^{x-3} \cdot g - \text{etc.} - m^{x-2} \cdot (m+1)g - m^{x-1} \cdot g \\ &= (m+1)^{x-1}b - (m+1)^{x-1} \cdot g - m \cdot (m+1)^{x-2} \cdot g - m^2 \cdot (m+1)^{x-3} \cdot g - \text{etc.} - m^{x-2} \cdot (m+1)g - m^{x-1}g \\ &= (m+1)^{x-1} \cdot b - g[(m+1)^{x-1} + m(m+1)^{x-2} + m^2 \cdot (m+1)^{x-3} + \text{etc.} + m^{x-2} \cdot (m+1) + m^{x-1}] \end{aligned}$$

Hier ist nun die in der Parenthese eingeschlossene Reihe eine abnehmende geometrische Progression, von der

$$\text{das erste Glied} = (m+1)^{x-1} = a$$

$$\text{das letzte Glied} = m^{x-1} = u$$

$$\text{der Exponent} = \frac{2\text{tes Glied}}{1\text{tes Glied}} = \frac{m \cdot (m+1)^{x-2}}{(m+1)^{x-1}} = \frac{m}{m+1} = e$$

und deren Summe man nach Kästners Anf. der Anal. endl. Gröſſen (§. 100.)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{ue - a}{e - 1} = \frac{m^{x-1} \cdot m}{m+1} - \frac{(m+1)^{x-1}}{\frac{m}{m+1} - 1} \\
 &= \frac{m^x - (m+1)^x}{m+1} = \frac{m^x - (m+1)^x}{m - m - 1} \\
 &= \frac{m^x - (m+1)^x}{-1} = -m^x + (m+1)^x
 \end{aligned}$$

findet; daher wird

$$\begin{aligned}
 m^{x-1} \cdot V &= (m+1)^{x-1} \cdot b - g [-m^x + (m+1)^x] \\
 &= (m+1)^{x-1} \cdot b + m^x \cdot g - (m+1)^x \cdot g \\
 &= m^x \cdot g - (m+1)^x \cdot g + (m+1)^{x-1} \cdot b \\
 &= m^x \cdot g - [(m+1)^x \cdot g - (m+1)^{x-1} \cdot b] \\
 &= m^x \cdot g - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b]; \\
 \text{also } V &= \frac{m^x \cdot g}{m^{x-1}} - \frac{(m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b]}{m^{x-1}} \\
 &= mg - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b] : m^{x-1},
 \end{aligned}$$

welches die Formel *A* war.

[§. 5.]

No. II.

Wenn ein vorgegebener Waldbestand *b* in $x-1$ Jahren x Holzschläge, deren jeder *g* Klaftern beträgt, nemlich einen mit Anfange des ersten Jahres, und weiter hin einen nach Verfluſſ eines jeden Jahres erleidet; *S* die Summe aller jährlichen in den $x-1$ Jahren aufeinanderfolgenden Zuwachsbeträge, und *V* den nach dem letzten oder x ten Holzschlag verbleibenden Waldbestand bedeutet, so bestimmt die Gleichung

B.

$$b + S = xg + V$$

die Verhältnisse, welche die hier genannten Gröſſen gegeneinander haben.

B e w e i s.

Die in No. I. bestimmten von Jahr zu Jahr sich ergebenden Zuwachsbeträge waren

$$\text{im } 1\text{ten Jahre } (b - g) : m = \frac{mg - mg + (b - g)}{m}$$

$$= \frac{mg - mg - g + b}{m}$$

$$= \frac{mg - (mg + g) + b}{m}$$

$$= \frac{mg - [(m+1)g - b]}{m}$$

$$= g - \frac{[(m+1)g - b]}{m}$$

$$= g - (m+1)^0 \cdot [(m+1)g - b] : m$$

$$\text{im } 2\text{ten Jahre} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad = g - (m+1)^1 \cdot [(m+1)g - b] : m^2$$

$$\text{im } 3\text{ten Jahre} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad = g - (m+1)^2 \cdot [(m+1)g - b] : m^3$$

⋮

$$\text{im } (x-1)\text{ten Jahre} \quad = g - (m+1)^{x-2} \cdot [(m+1)g - b] : m^{x-1}$$

daher ist die Summe dieser Zuwachsbeträge, oder

$$S = (x-1)g - \left[\frac{(m+1)^0}{m} + \frac{(m+1)^1}{m^2} + \frac{(m+1)^2}{m^3} + \dots + \frac{(m+1)^{x-2}}{m^{x-1}} \right] \cdot [(m+1)g - b]$$

$$= (x-1)g - [m^{-1} + (m+1) \cdot m^{-2} + (m+1)^2 \cdot m^{-3} + \dots + (m+1)^{x-2} \cdot m^{-(x-1)}] \cdot [(m+1)g - b]$$

Addirt man die in dieser Parenthese eingeschlossene geometrische Progression nach Kästners Anfangsgr. der Anal. endl. Gr. (§. 100.) nach der Formel

$$S = \frac{ue - a}{e - 1}, \text{ so wird, da}$$

das erste Glied $a = m^{-1}$

das letzte Glied $u = (m+1)^{x-2} \cdot m^{-(x-1)}$

der Exponent $e = \frac{2\text{tes Glied}}{1\text{tes Glied}} = \frac{(m+1) \cdot m^{-2}}{m^{-1}} = (m+1) \cdot m^{-1}$,

$$s = \frac{(m+1)^{x-2} \cdot m^{(x-1)} \cdot (m+1) \cdot m^{-1} - m^{-1}}{(m+1) \cdot m^{-1} - 1};$$

Es ist aber der Nenner $(m+1) \cdot m^{-1} - 1 = m^1 \cdot m^{-1} + m^{-1} - 1$

$$= m^0 + m^{-1} - 1$$

$$= 1 + m^{-1} - 1$$

$$= m^{-1}$$

Hierdurch dividire man den Zähler, so wird

$$s = (m+1)^{x-2} \cdot m^{-(x-1)} \cdot (m+1) - 1$$

$$= (m+1)^{x-1} \cdot m^{-(x-1)} - 1$$

$$= \frac{(m+1)^{x-1}}{m^{x-1}} - 1$$

$$\text{also } S = (x-1)g - \left(\frac{(m+1)^{x-1}}{m^{x-1}} - 1 \right) \cdot [(m+1)g - b]$$

$$= (x-1)g - \left(\frac{(m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b]}{m^{x-1}} - [(m+1)g - b] \right)$$

$$= (x-1)g - \frac{(m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b]}{m^{x-1}} + (m+1)g - b$$

$$\text{daher } b+S = (x-1)g + (m+1)g - \frac{(m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b]}{m^{x-1}}$$

$$= xg + mg - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b] : m^{x-1}$$

$$\text{Da nun } V = mg - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b] : m^{x-1}$$

so wird $b+S = xg + V$.

Anmerk. Hieraus folgt, dass von einem vorgegebenen Waldbestande b , der in $x-1$ Jahren x Holzschläge, jeden zu g Klaftern, erleidet, wenn $b = xg$ ist, zuletzt noch ein Waldbestand $V = S$ verbleibt, der also noch so groß ist, als die ganze Summe des Nachwuchses des von Jahr zu Jahr ungefällt gebliebenen Holzes, und den man verlieren würde, wenn man den vorgegebenen Waldbestand b in so viele gleiche Räume eintheilte, als Jahre mit dessen Niederschläge gelangt werden sollten.

No. III.

[§. 6.]

Es sei ein Waldbestand wie vorhin $= b$ Klaftern taxirt worden, und erreiche seinen jährlichen Zuwachs ebenfalls in dem Verhältnisse, wie $m:1$; nun will man aber nicht sogleich nach der Taxation wie in No. I., sondern erst nach Verfluß eines Jahres das erste Gehau abtreiben, und dann jährlich so fortfahren. Man soll wiederum den Waldbestand V nach jedem x ten Holzschlag angeben.

Auflösung.

Da jede m Klaftern in einem Jahre zu $m+1$ Klaftern anwachsen, so wird der Waldbestand b in einem Jahre zu $\frac{(m+1) \cdot b}{m}$ Klaftern. Hat nun der Waldbestand b diese Gröfse erreicht, so wird er gleich und nach Verfluß eines jeden Jahres mit einem Holzschlage g angegriffen. Daher wird man aus der Formel A die für diesen Fall nöthige Formel finden, wenn man nur in sie $\frac{(m+1)b}{m}$ statt b setzt. Es wird also

$$V = mg - (m+1)^{x-1} \cdot \left[(m+1)g - \frac{(m+1)b}{m} \right] : m^{x-1}$$

$$\text{oder } V = mg - (m+1)^x \cdot [mg - b] : m^x$$

C.

Zus. I. Die Formel B , welche die Verhältnisse der Gröfsen b , S , x , g und V nach ihren in No. I. bestimmten Bedeutungen gegen einander darstellt, bleibt auch für diesen Fall die nämliche. Denn für einen Waldbestand $\frac{(m+1)b}{m}$, der, wie in No. II., in $x-1$ Jahren x Holzschläge erleidet, wird die Formel B , wenn man in sie $\frac{(m+1)b}{m}$ statt b setzt, zu

$$\frac{(m+1)b}{m} + S = xg + V$$

Es war aber der Waldbestand $\frac{(m+1)b}{m}$ vor einem Jahre b , und der Zuwachs

von b im ersten Jahre $= \frac{b}{m}$. Dieser Zuwachs $\frac{b}{m}$ ist jetzt in S noch nicht enthalten, und muß, wenn er unter S auch zugleich mit begriffen werden soll, auch zu dem zweyten Theile der letzten Formel, nämlich zu $xg + V$ noch hinzu addirt werden, damit die Gleichung noch bestehe. Alsdenn wird

$$\frac{(m+1)b}{m} + S = xg + V + \frac{b}{m}$$

$$\text{oder } \frac{(m+1)b}{m} - \frac{b}{m} + S = xg + V,$$

$$\text{oder } b + S = xg + V$$

welche Formel von B in nichts unterschieden ist.

Zus. 2. In den Formeln A , B , C bedeutet x die Anzahl der Holzschläge, nach deren Fällung der Waldbestand V übrig bleibt; wollte man aber lieber an deren Statt die Anzahl Jahre, die bis zu dem letzten Holzschlag verstreichen, in diese Formeln bringen, und sie mit den Buchstaben n benennen, so müßte man für den Fall, wenn die Anzahl der Holzschläge um eine Einheit größer ist, als die Anzahl der darauf verwendeten Jahre, in die Formeln A und B $n+1$ statt x ; und für den Fall, wenn die Anzahl der Jahre mit der Anzahl der Holzschläge einerlei ist, in die Formeln B und C n statt x setzen.

Zus. 3. Wenn in obiger Aufgabe der Waldbestand V nach dem x ten Holzschlag $= 0$ seyn soll, x bekannt ist, und g gesucht wird, so findet man g aus

$$0 = mg - (m+1)^x \cdot [mg - b] : m^x \quad (\text{Form. C})$$

$$0 = mg - \frac{(m+1)^x \cdot mg}{m^x} + \frac{(m+1)^x \cdot b}{m^x}$$

$$0 = m^x \cdot mg - (m+1)^x \cdot mg + (m+1)^x \cdot b$$

$$g = \frac{(m+1)^x \cdot b}{[(m+1)^x - m^x] \cdot m}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(m+1)^x \cdot b}{m^x} \\
 &= \frac{(m+1)^x}{m^x} \cdot \frac{m^x}{m^x} \cdot \frac{1}{m} \\
 &= \frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^x \cdot b \cdot \frac{1}{m}}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^x - 1} \\
 &= \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x \cdot b \cdot \frac{1}{m}}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x - 1} \\
 \text{also } \log. g &= x \cdot \log. \left(1 + \frac{1}{m}\right) + \log. b + \log. \frac{1}{m} - \log. \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x - 1\right]
 \end{aligned}$$

Nun setze man $z = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^x$ so findet man aus der Formel

$$\log. g = x \cdot \log. \left(1 + \frac{1}{m}\right) + \log. b + \log. \frac{1}{m} - \log. (z - 1)$$

Den Werth von g , wenn man zuvor z aus

$$\log. z = x \cdot \log. \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

bestimmt hat.

Nimmt man nun mit Herrn Prof. Däzel an, daß 1000 Klaftern jährlich u Klaftern Zuwachs erhalten, so darf man nur in die beyden letzten Formeln $\frac{u}{1000}$ statt $\frac{1}{m}$ setzen, so hat man das Verfahren, welches in Däzels Anleitung zur Forstwissenschaft §. 285. als Auflösung der daselbst gegebenen Aufgabe mitgetheilet worden, überzeugend aus unsern Formeln gefolgert.

[§. 7.]

No. IV.

Ein Waldbestand a wird h Jahre hindurch seinem eigenen Wachsthum überlassen und leidet während diesem Zeitraum keinen Holzschlag. Zu was für einem Waldbestand b wird a bis zu Ende der Jahre h anwachsen?

Auflösung.

Diese Aufgabe kann man 1., entweder durch die Formel A auflösen, wenn man den Bedingungen dieser Aufgabe zu Folge, $g=0$, $b=a$, $x=h+1$ und $V=b$ setzt, wodurch man

$$b = -(m+1)^h \cdot -a : m^h$$

D. oder $b = \frac{(m+1)^h \cdot a}{m^h}$

erhält; oder 2., durch die Formel C , wenn man in sie $g=0$, $b=a$, $x=h$, und $V=b$ setzt. Denn hierdurch erhält man ebenfalls

$$b = -(m+1)^h \cdot (-a) : m^h = \frac{(m+1)^h \cdot a}{m^h}.$$

[§. 8.]

No. V.

Ein Waldbestand a bleibt h Jahre mit Holzschlag verschont, und ganz seinem Wachstume überlassen; sogleich nach den h Jahren aber wird ein Gehau $=g$ und sofort jährlich abgetrieben. Wie groß wird der Waldbestand U nach Verfluß von $h+n$ Jahren seyn?

Auflösung.

Nach Verlauf von h Jahren entsteht aus dem vorhandenen Waldbestand a ein Waldbestand

$$b = (m+1)^h \cdot a : m^h \quad (\text{nach Form. D})$$

Da nun dieser Waldbestand b bey dem Anfange der Periode von n Jahren sogleich einen Holzschlag u. s. f. nach Verfluß eines jeden der n Jahre, erleidet, so ergibt sich der gesuchte Waldbestand U aus der Formel A , wenn man $x=n+1$, also $x-1=n$ setzt. Es wird nämlich:

$$U = mg - (m+1)^n \cdot [(m+1)g - b] : m^n,$$

und wenn man den eben gefundenen Werth von b in diese Formel setzt, so wird

$$\begin{aligned}
 U &= mg - (m+1)^n \cdot \left[(m+1)g - \frac{(m+1)^n \cdot a}{m^h} \right] : m^n \\
 &= mg - (m+1)^n \cdot \left[\frac{(m+1) \cdot m^h \cdot g - (m+1)^n \cdot a}{m^h} \right] : m^n \\
 &= mg - \frac{(m+1)^n \cdot [(m+1) \cdot m^h \cdot g - (m+1)^{h-1} \cdot a]}{m^h \cdot m^n} \\
 &= mg - \frac{(m+1)^n \cdot (m+1) \cdot [m^h \cdot g - (m+1)^{h-1} \cdot a]}{m^h \cdot m^n} \\
 \text{u. endlich } U &= mg - \frac{(m+1)^{n+1} \cdot [m^h \cdot g - (m+1)^{h-1} \cdot a]}{m^{h+n}}
 \end{aligned}$$

E.

Setzt man in diese Formel $h=1$, so erhält man hieraus die schon gefundene Formel C, worinne x mit $n+1$ und b mit a gleichbedeutend ist.

No. VI.

[§. 9.]

Wenn ein vorgegebener Waldbestand a seinem in dem Verhältnisse, wie $m:1$, jährlich fortgehenden Wuchse ungestört überlassen bleibt und h Jahre geschont, nach deren Verlauf aber in den darauffolgenden n Jahren, durch jährlichen, folglich $n+1$ mahl wiederholten Holzschlag, von dem Betrage g , gänzlich abgetrieben werden soll, das Verhältniß, welches alsdenn die durch die Buchstaben a , m , n , h , g ausgedrückten Größen gegen einander haben, durch eine Gleichung zu bestimmen.

Auflösung.

Da der Waldbestand a nach Verlauf von $h+n$ Jahren gänzlich abgetrieben seyn soll, also der am Ende verbleibende Waldbestand $= 0$ ist, so findet man die gesuchte Gleichung aus der Formel E, wenn man $U=0$ setzt. Nämlich es ist

$$\begin{aligned}
 0 &= mg - (m+1)^{n+1} \cdot [m^h \cdot g - (m+1)^{h-1} \cdot a] : m^{h+n} \\
 0 &= mg - \frac{m^h \cdot (m+1)^{n+1} \cdot g - (m+1)^{n+1} \cdot (m+1)^{h-1} \cdot a}{m^{h+n}} \\
 0 &= mg - \frac{m^h \cdot (m+1)^{n+1} \cdot g - (m+1)^{h+n} \cdot a}{m^{h+n}},
 \end{aligned}$$

und, wenn man durch m^{h+n} multiplicirt, so wird

$$0 = m^{h+n+1} \cdot g - [m^h \cdot (m+1)^{n+1} \cdot g - (m+1)^{h+n} \cdot a]$$

$$0 = m^h \cdot m^{n+1} \cdot g - m^h \cdot (m+1)^{n+1} \cdot g + (m+1)^{h+n} \cdot a$$

$$\text{also } m^h \cdot (m+1)^{n+1} \cdot g - m^h \cdot m^{n+1} \cdot g = (m+1)^{h+n} \cdot a$$

$$F. \quad \text{oder } m^h \cdot [(m+1)^{n+1} - m^{n+1}] \cdot g = (m+1)^{h+n} \cdot a$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Zus. Für $h = 0$ wird mit Beybehaltung der übrigen Bedingungen in vorstehender Aufgabe aus der Formel F :

$$G. \quad \left((m+1)^{n+1} - m^{n+1} \right) \cdot g = (m+1)^n \cdot a$$

Hiernach ist der 2te Theil des 9ten §. in Herrn v. Oppels Abhandl. abzuändern, dessen Unrichtigkeit ein jeder hieraus leicht einsehen wird.

[§. 10.
u. 11.]

No. VII.

Dürfte man annehmen, daß ein Waldbestand a ewig in dem jährlichen Verhältnisse, wie $m:1$, fortwüchse, und man machte nach h Jahren jährlich einen Holzschlag von unveränderlichem Betrage, so würde der jährliche Hau g und der nach jedem Holzschlage verbleibende Waldbestand folgendergestalt gefunden werden:

Die Gleichung $m^h \cdot [(m+1)^{n+1} - m^{n+1}] \cdot g = (m+1)^{h+n} \cdot a$ (Form. F) zeigt die genaue Verbindung der Grössen a , m , g , h und n , welche letztere hier $= \infty$ ist.

Wenn man die Factoren m^h und g in die Grössen innerhalb der Parenthese multiplicirt, so verändert sich diese Gleichung in

$$m^h \cdot (m+1)^{n+1} \cdot g - m^h \cdot m^{n+1} \cdot g = (m+1)^{h+n} \cdot a$$

und dividirt man durch $(m+1)^{n+1}$, so wird

$$m^h \cdot g - \frac{m^h \cdot m^{n+1} \cdot g}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(m+1)^{h+n} \cdot a}{(m+1)^{n+1}}$$

$$\text{oder } m^h \cdot g - \frac{m^h \cdot m^{n+1} \cdot g}{(m+1)^{n+1}} = (m+1)^{h-1} \cdot a$$

$$\text{oder } m^h \cdot g - \frac{m^{h+1} \cdot m^n \cdot g}{(m+1) \cdot (m+1)^n} = (m+1)^{h-1} \cdot a$$

$$\text{oder } m^h \cdot g - \frac{m^n}{(m+1)^n} \cdot \frac{m^{h+1} \cdot g}{m+1} = (m+1)^{h-1} \cdot a$$

Hierinne ist der Factor $\frac{m^n}{(m+1)^n} = \frac{1}{\frac{(m+1)^n}{m^n}} = \frac{1}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$; daher $m^h \cdot g = (m+1)^{h-1} \cdot a$, folglich der gesuchte Betrag des jährlichen Holzschlags

$$g = \frac{(m+1)^{h-1} \cdot a}{m^h}$$

$$\text{und } \log. g = \log. a + (h-1) \log. (m+1) - h \log. m.$$

Um nun die Gröſſe des nach jedem Holzschlage verbleibenden Waldbestandes zu erfahren, multiplicire man diese letzte Gleichung durch $m+1$, so wird

$$(m+1) \cdot g = \frac{(m+1)^h \cdot a}{m^h}$$

Es ist aber $\frac{(m+1)^h \cdot a}{m^h}$, also auch $(m+1) \cdot g$ der Waldbestand, der aus dem anfänglichen Waldbestande a nach h jähriger Schonung erwuchs, und von diesem Waldbestande $= (m+1) \cdot g$ soll nun sogleich und nach Verfluſſ eines jeden Jahres ein Holzschlag $= g$ gefällt werden. Setzt man daher in die Formel A $(m+1) \cdot g$ statt b , so wird der nach dem x ten Holzschlag verbleibende Waldbestand $=$

$$mg - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1) \cdot g - (m+1)g] : m^{x-1} = mg,$$

weil die in der Parenthese stehende Gröſſe $= 0$ ist. Da man nun für x jede beliebige Zahl setzen kann, so wird nach jedem Holzschlage ein Waldbestand von einem beständigen unveränderlichen Betrage $= mg$ übrig verbleiben, und der in dem nächstfolgenden Jahre seines Fortwuchses zu erwartende Zuwachs dem ebenfalls un-

veränderlichen Holzschlagsbetrage $\frac{mg}{m} = g$ gleich seyn.

Hieraus ist zugleich klar, daß für $h=0$ der gesuchte jährliche Holzschlag =

$$g = \frac{(m+1)^{0-1}}{m^0} \cdot a = (m+1)^{-1} \cdot a = \frac{a}{m+1}$$

und der nach jedem Holzschlage verbleibende Waldbestand ebenfalls $= mg$ ist.

[§. 12.]

No. VIII.

Ein Forst habe gegenwärtig a Klaftern Waldbestand und werde h Jahre mit Holzschlag verschont; er soll aber nach Verlauf dieser Zeit in $i+k$ Jahren durch einen alljährlichen und unveränderlichen Holzschlag g gänzlich abgetrieben werden. Hierbey wird noch vorausgesetzt:

- 1) daß der Waldbestand in dem Zeitraume $h+i$ noch merklich und zwar im Durchschnitt nach dem Verhältnisse, wie $m:1$ fortwachse, weil der Wachsthum im Anfange dieses Zeitraums größer, als am Ende desselben ist.
- 2) In den darauffolgenden k Jahren sey der Zuwachs so unbedeutend, daß er gänzlich aus der Rechnung gelassen werden kann.

Wie groß wird demnach g gefunden?

Auflösung.

Nach $h+i$ Jahren verbleibt nach der Formel E ein Waldbestand

$$U = mg - (m+1)^{i+1} \cdot [m^h \cdot g - (m+1)^{h-1} \cdot a] : m^{h+i}$$

Da nun dieser Waldbestand nach Verlauf der $h+i$ Jahre keinen merklichen Wachsthum mehr hat, und in den nun folgenden k Jahren bei jährlicher Fällung von g Klaftern gänzlich abgetrieben werden soll, so ist obiger Waldbestand $U = kg$, also

$$kg = mg - (m+1)^{i+1} \cdot [m^h \cdot g - (m+1)^{h-1} \cdot a] : m^{h+i}$$

$$\text{und } m^{h+i} \cdot kg = m^{h+i} \cdot mg - (m+1)^{i+1} \cdot m^h \cdot g + (m+1)^{i+1} \cdot (m+1)^{h-1} \cdot a$$

$$\text{oder } m^h \cdot m^i \cdot kg = m^h \cdot m^i \cdot mg - (m+1)^{i+1} \cdot m^h \cdot g + (m+1)^{i+1} \cdot (m+1)^{h-1} \cdot a$$

$$\text{und } (m+1)^{i+1} \cdot m^h \cdot g - m^h \cdot m^i \cdot m \cdot g + m^h \cdot m^i \cdot kg = (m+1)^{i+1} \cdot (m+1)^{h-1} \cdot a$$

$$\text{oder } m^h \cdot (m+1)^{i+1} \cdot g - m^h \cdot m^i \cdot (m-k) \cdot g = (m+1)^{i+1} \cdot (m+1)^{h-1} \cdot a$$

$$\text{oder } m^h \cdot [(m+1)^{i+1} - m^i \cdot (m-k)] \cdot g = (m+1)^{i+1} \cdot (m+1)^{h-1} \cdot a$$

$$\text{und } \frac{m^h \cdot [(m+1)^{i+1} - m^i \cdot (m-k)] \cdot g}{(m+1)^{i+1}} = \frac{(m+1)^{i+1} \cdot (m+1)^{h-1} \cdot a}{(m+1)^{i+1}}$$

$$\text{oder } m^h \cdot \left[1 - \frac{m^i \cdot (m-k)}{(m+1)^{i+1}} \right] g = (m+1)^{h-1} \cdot a$$

$$\text{woraus } g = (m+1)^{h-1} \cdot a : m^h \cdot \left[1 - \frac{m^i \cdot (m-k)}{(m+1)^{i+1}} \right].$$

H.

No. IX.

[§. 13.]

Man weiß, daß der jährliche Zuwachs eines Waldbestandes b in den nach der Ordnung auf einander folgenden Jahren sich wie $\beta:1$, $\gamma:1$, $\delta:1$, $\epsilon:1$ und s. f. verhalte. Soll nun erwähnter Waldbestand in $i+k$ Jahren gänzlich abgeholzt werden, so fragt sich, wie groß der jährliche Holzschlag g zu machen sey?

Auflösung.

Es ist $b-g$ der Waldbestand nach dem ersten Holzschlage. In dem hierauf folgenden Jahre werden jede β Klaftern zu $\beta+1$ Klaftern. Da nun

$\beta : \beta+1 = b-g$: Waldbestand vor dem 2ten Schlage, so wird der Waldbestand vor dem 2ten Schlage =

$$\frac{(\beta+1) \cdot (b-g)}{\beta}$$

Hiervon ziehe man den zweyten Holzschlag $g = \frac{\beta g}{\beta}$ ab, so wird der Waldbestand nach dem 2ten Holzschlage =

$$\frac{(\beta+1) \cdot (b-g) - \beta g}{\beta}$$

In dem hierauf folgenden Jahre werden jede γ Klaftern desselben zu $\gamma+1$ Klaftern. Da nun $\gamma : \gamma+1 =$ der Waldbestand nach dem 2ten Holzschlag : dem Waldbestand vor dem 3ten Holzschlag, so wird der Waldbestand vor dem 3ten Holzschlag =

$$= \frac{(\beta+1)(\gamma+1)(b-g) - \beta(\gamma+1)g}{\beta\gamma}$$

Hiervon den neuem Gehau $g = \frac{\beta\gamma g}{\beta\gamma}$ abgezogen, giebt den Waldbestand nach

dem 3ten Haue =

$$= \frac{(\beta + 1) \cdot (\gamma + 1) \cdot (b - g) - \beta \cdot (\gamma + 1) \cdot g - \beta \cdot \gamma \cdot g}{\beta \cdot \gamma}.$$

So suche man ferner den Waldbestand, der nach jedem Holzschlage verbleibt, bis man auf den letzten Holzschlag gekommen ist. Alsdenn setze man die Formel für den zuletzt verbleibenden Waldbestand dem Betrage gleich, der vom Forste b nach dem letzten Holzschlage übrig bleiben soll, und bestimme aus dieser Gleichung den Werth von g , als den jährlich zu fallenden Hau.

[§. 14.]

No. X.

Ein vorgegebener Waldbestand a habe

- 1) in $h + i$ Jahren noch merklichen Zuwachs;
- 2) er werde h Jahre lang mit Holzschlag verschont;
- 3) nach Verfluß von h Zeit soll er in $i + k$ Jahren durch $i + k + 1$ Holzschlägen von gleichem Ertrage g gänzlich abgetrieben werden.

Es wird überdies angenommen, daß

- 4) während den ersten $h = c$ Jahren das jährliche Zuwachsverhältniß $m : 1$ sey;
- 5) in den darauffolgenden $i = d + e + f$ Jahren aber verringere sich der jährliche Zuwachs nach und nach so, daß selbiger
 - in den d Jahren, wie $p : 1$,
 - in den e Jahren, wie $q : 1$,
 - und in den f Jahren, wie $r : 1$,
 sich verhalte. Man soll den Betrag g des jährlichen Holzschlags bestimmen.

Auflösung.

Nach Ablauf der Schonungszeit von $h = c$ Jahren ergiebt sich der Betrag des Waldbestandes, wenn man in die Formel D , c statt h setzt, folgendergestalt:

$$I., b = (m + 1)^c \cdot a : m^c.$$

Dieser Waldbestand b leidet nun in der Periode von d Jahren $d+1$ Holzschläge, und das Verhältniß des jährlichen Wachstums ist $= p:1$; setzt man daher in die Formel A $d+1$ statt x und p statt m , so wird der nach $h+d$ Jahren und nach $d+1$ Holzschlägen verbleibende Waldbestand

$$\begin{aligned} P &= pg - \frac{(p+1)^d \cdot [(p+1)g - b]}{p^d} \\ &= \frac{p^{d+1} \cdot g - (p+1)^d \cdot [(p+1)g - b]}{p^d} \\ &= \frac{p^{d+1} \cdot g - (p+1)^d \cdot (p+1)g + (p+1)^d \cdot b}{p^d} \\ &= \frac{(p+1)^d \cdot b + p^{d+1} \cdot g - (p+1)^d \cdot (p+1) \cdot g}{p^d} \end{aligned}$$

$$\text{oder II. } P = \frac{(p+1)^d \cdot b}{p^d} + pg - \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot (p+1) \cdot g.$$

In der nun folgenden Periode von e Jahren wird der Waldbestand P mit e Holzschlägen angegriffen, und das Verhältniß des jährlichen Wachstums ist $= q:1$, daher findet man aus der Formel C , wenn man in sie e statt x und q statt m und P statt b setzt, den nach $h+d+e$ Jahren und nach $d+e+1$ vollbrachten Holzschlägen verbleibenden Waldbestand Q , nämlich

$$Q = qg - (q+1)^e \cdot [qg - P] : q^e$$

$$Q = qg - \frac{q \cdot (q+1)^e}{q^e} \cdot g + \frac{(q+1)^e \cdot P}{q^e}$$

$$\text{oder III. } Q = -\frac{(q+1)^e \cdot P}{q^e} + qg - q \cdot \frac{(q+1)^e \cdot g}{q^e}.$$

Dieser Waldbestand Q leidet nun in der folgenden Periode von f Jahren, in welcher das Verhältniß des jährlichen Wachstums $= r:1$ ist, f Holzschläge; setzt man daher wieder in die Formel C f statt x , r statt m und Q statt b , so findet man

den nach $h + d + e + f$ Jahren und nach $h + d + e + f + 1$ vollbrachten Holzschlägen verbleibenden Waldbestand R , nämlich

$$R = rg - (r+1)^f \cdot [rg - Q] : r^f$$

$$\text{oder } R = rg - \frac{r \cdot (r+1)^f}{r^f} \cdot g + \frac{(r+1)^f \cdot Q}{r^f}$$

$$\text{oder IV. } R = \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot Q + rg - r \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot g$$

Nun hört mit Verfluß dieser Periode von f Jahren aller merkliche Nachwuchs des Holzes auf, und in den darauffolgenden k Jahren soll der Waldbestand R , durch einen jährlichen Holzschlag $=g$, gänzlich abgetrieben werden, daher ist $R=kg$, woraus man $g=R:k$ finden könnte. Es enthält aber R den Werth von Q , Q den Werth von P und P den Werth von b , also sind in der Gleichung $g=R:k$ die Verhältnisse $\frac{(m+1)^c}{m^c}$, $\frac{(p+1)^d}{p^d}$, $\frac{(q+1)^e}{q^e}$ und $\frac{(r+1)^f}{r^f}$, als Factoren ihrer Glieder, begriffen, welches die Formel $g=R:k$, wenn die Zahlen c, d, e, f nur einigermaßen groß sind, für die Berechnung sehr beschwerlich macht. Man muß daher suchen, diese Verhältnisse durch einfache Zahlen auszudrücken, welches auf folgende Art durch Hülfe der Logarithmen geschehen wird.

Es seyen nämlich A, B, C, D die vierten geometr. Proportional-Glieder folgender Proportionen:

$$\alpha) (m+1)^c : m^c = 10000 : A$$

$$\beta) (p+1)^d : p^d = A : B$$

$$\gamma) (q+1)^e : q^e = B : C$$

$$\delta) (r+1)^f : r^f = C : D$$

$$\text{also } \log. A = \log. 10000 + c \cdot \log. m - c \cdot \log. (m+1),$$

$$\text{oder 1) } \log. A = \log. 10000 - c \cdot (\log. (m+1) - \log. m);$$

$$\text{Ferner } \log. B = \log. A + d \cdot \log. p - d \cdot \log. (p+1),$$

$$\text{oder 2) } \log. B = \log. A - d \cdot (\log. (p+1) - \log. p);$$

und $\log. C = \log. B + e. \log. q - e. \log. (q+1)$
 oder 3) $\log. C = \log. B - e. (\log. (q+1) - \log. q)$
 endlich $\log. D = \log. C + f. \log. r - f. \log. (r+1)$
 oder 4) $\log. D = \log. C - f. \log. (r+1) - \log. r$.

und hieraus erhält man die Werthe von A, B, C, D selbst.

Da nun diese Gröſſen bekannt sind, und überdieſs aus der Gleichung:

$$b = (m+1)^c \cdot a : m^c \quad (I) \quad \frac{b}{a} = \frac{(m+1)^c}{m^c} \quad \text{und aus der Proportion } \alpha \quad \frac{(m+1)^c}{m^c}$$

$$= \frac{10000}{A} \quad \text{folgt, so wird} \quad \frac{b}{a} = \frac{10000}{A}$$

$$\text{also } b = \frac{10000 \cdot a}{A}$$

$$\text{ferner } \frac{(p+1)^d}{p^d} = \frac{A}{B}, \quad \text{aus der Proportion } \beta,$$

$$\frac{(q+1)^e}{q^e} = \frac{B}{C}, \quad \text{aus der Proportion } \gamma,$$

$$\frac{(r+1)^f}{r^f} = \frac{C}{D}, \quad \text{aus der Proportion } \delta.$$

Setzt man nun in die Gleichung II. statt b und $\frac{(p+1)^d}{p^d}$ ihre hier gefundene-
 nen Werthe, so wird

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{10000 \cdot a}{A} + pg - (p+1) \cdot \frac{A}{B} \cdot g = P,$$

$$\text{oder V. } 10000 \cdot a + B \cdot pg - (p+1) Ag = B \cdot P.$$

Setzt man ferner $\frac{(q+1)^e}{q^e} = \frac{B}{C}$ in die Gleichung III, so wird

$$\frac{B}{C} \cdot P + qg - q \cdot \frac{B}{C} \cdot g = Q,$$

oder VI. $B.P. + qCg - qBg = CQ.$

Setzt man endlich $\frac{(r+1)^f}{r^f} = \frac{C}{D}$ in die Gleichung IV. so wird

$$\frac{C}{D} \cdot Q + rg - r \cdot \frac{C}{D} \cdot g = R$$

oder VII. $CQ + rD \cdot g - rCg = DR$

Nun substituirt man den Werth von B.P. aus V in VI, so wird

$$10000 \cdot a + pBg - (p+1)Ag + qCg - qBg = CQ$$

Diesen Werth von CQ substituirt man in VII, so entsteht

$$10000 \cdot a + p \cdot Bg - (p+1)Ag + q \cdot Cg - qBg + rDg - rCg = DR = kDg, \text{ weil } R = kg \text{ ist, folglich}$$

$$10000 \cdot a = [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - (r-k)D] \cdot g$$

I. woraus $g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - (r-k)D]$ gefunden wird.

Der Praktiker hat also bey der Auflösung obiger Aufgabe nur sein Augenmerk auf diese Formel I zu nehmen, in welcher die Werthe der Buchstaben A, B, C, D vorher aus den gefundenen Gleichungen:

$$\log. A = \log. 10000 - c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. B = \log. A - d. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. C = \log. B - e. [\log. (q+1) - \log. q.]$$

$$\log. D = \log. C - f. [\log. (r+1) - \log. r]$$

zu bestimmen sind.

[§. 15.]

Zweyte Auflösung vöriger Aufgabe.

Da die Verhältnisse $\frac{(m+1)^e}{m^c}$, $\frac{(m+1)^d}{p^d}$, $\frac{(q+1)^e}{q^e}$ und $\frac{(r+1)^f}{r^f}$

unter unendlich vielen Formen dargestellt werden können, so wird man auch den Werth von g durch unendlich viel verschiedene Formeln, die jedoch alle auf eins hinauslaufen, ausdrücken können. Herr von Oppel hat daher (in §. 15.) zur Be-

stimmung der GröÙe von g noch eine andere Formel entwickelt, damit in jedem Falle der Werth, den man aus jener Formel I für g erhält, nach dieser geprüft werden könne.

Wenn man nämlich H, G, F, E zu den vierten Proportional-Gliedern folgender Proportionen

$$r^f : (r+1)^f = 1 : H$$

$$q^e : (q+1)^e = H : G$$

$$p^d : (p+1)^d = G : F$$

$$m^c : (m+1)^c = F : E$$

macht, und die Werthe derselben nach und nach durch Hülfe der Logarithmen auf folgende Art, nämlich durch

$$\log. H = \log. ((r+1)^f : r^f) = f. [\log. (r+1) - \log. r]$$

$$\log. G = \log. [(q+1)^e . H : q^e] = \log. H + e. [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\log. F = \log. [(p+1)^d . G : p^d] = \log. G + d. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. E = \log. [(m+1)^c . F : m^c] = \log. F + c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

bestimmt; hierauf in der ersten Auflösung

$$\text{in die Gleichung I } \frac{(m+1)^c}{m^c} = \frac{E}{F}$$

$$\text{in die Gleichung II } \frac{(p+1)^d}{p^d} = \frac{F}{G}$$

$$\text{in die Gleichung III } \frac{(q+1)^e}{q^e} = \frac{G}{H}$$

$$\text{in die Gleichung IV } \frac{(r+1)^f}{r^f} = H$$

setzt, so wird

$$\frac{E}{F} . a = b \quad (\text{aus I. vorige Aufl.})$$

$$\text{und 1) } Ea = Fb$$

$$\text{Ferner } \frac{F}{G} . b + pg - (p+1) . \frac{F}{G} . g = P \quad (\text{aus II.})$$

$$\text{also 2) } Fb + pGg - (p+1) Fg = GP$$

$$\text{Ferner } \frac{G}{H} \cdot P + qg - q \cdot \frac{G}{H} \cdot g = Q \quad (\text{aus III.})$$

$$\text{also 3) } GP + qHg - qGg = HQ.$$

$$\text{Endlich 4) } HQ + rg - rHg = R \quad (\text{aus IV.})$$

Die Gleichung 1 in 2 substituirt giebt

$$Ea + pGg - (p+1) Fg = GP$$

Diese in 3 substituirt, giebt

$$Ea + pGg - (p+1) Fg + qHg - qGg = HQ$$

Diese in 4 gesetzt, erzeugt:

$$Ea + pGg - (p+1) Fg + qHg - qGg + rg - rHg = R = kg$$

Hieraus wird

$$K. \quad g = Ea : [(p+1)F - (p-q)G - (q-r)H - r + k]$$

welche Formel in jedem Falle sehr leicht zu berechnen ist, wenn man vorher aus den Logarithmen der Grössen E, F, G, H, nämlich aus

$$\log. H = f \cdot [\log. (r+1) - \log. r]$$

$$\log. G = \log. H + e \cdot [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\log. F = \log. G + d \cdot [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. E = \log. F + c \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

nach der Reihe die Werthe von H, G, F und E selbst sucht, und sie in diese Formel setzt.

No. XI.

[§. 16.] Das Zuwachs - Verhältniss eines Waldbestandes a ist durch angestellte Beobachtungen

für die c ersten Jahre, wie m:1,

für die d folgenden Jahre: wie p:1,

für die e folgenden Jahre, wie q:1,

und für die f folgenden Jahre, wie r:1

gefunden, und nach Verfluß der Jahre c+d+e+f habe kein merklicher Zuwachs mehr statt. Wird nun dieser Waldbestand die ersten c Jahre hindurch geschont, in

den darauf folgenden Jahren aber jährlich ein Holzschlag von g Klaftern angeordnet, so fragt sich's, im wievielten Jahre (y) der Waldbestand auf den letzten Holzschlag verstaten werde?

Auflösung.

Wenn man diese Aufgabe mit der vorigen vergleicht, so findet man, daß die Gleichung I, nämlich

$$g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - (r-k)D]$$

die Bedingungen beyder Aufgaben in sich faßt, und man wird daher auch aus ihr die zu suchende Anzahl Jahre y auf folgende Art finden. Man setze I. $y = c + d + e + f$ und entwickle vorerst die für diese Aufgabe noch unbekannte GröÙe k , welche die Anzahl der nach $c + d + e + f$ folgenden Jahre bestimmt, in denen der Waldbestand keinen Zuwachs mehr hat, mit deren Ausgang der letzte Holzschlag erfolgt, und der Wald ganz abgetrieben ist. Es folgt nämlich aus obiger Gleichung

$$(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - (r-k)D = 10000 \cdot a : g$$

$$\text{oder } (p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - rD + kD = 10000 \cdot a : g$$

$$kD = 10000 \cdot a : g - (p+1)A + (p-q)B + (q-r)C + rD,$$

$$\text{also } k = \frac{10000 \cdot a : g - (p+1)A + (p-q)B + (q-r)C + rD}{D}$$

L.

Fällt der hier für k ausgeworfene Werth bejahend aus, so ist 1) $y = c + d + e + f + k$; wird $k = 0$, so ist 2) $y = c + d + e + f$; findet man hingegen den Werth von k verneinend, so wird 3) $y < c + d + e + f$, und dieser letzte Fall zeigt an, daß die Jahre des Holzschlags sich noch eher endigen, als des Gehölzes Vermehrung durch Zuwachs aufhört. Es ist daher zu weiterer Berechnung anderer Werthe von y fortzugehen.

Man sehe nun, ob die Jahre des Holzschlags sich in einem der f Jahre endigen werden, und setze daher

$$\text{II. } y = c + d + e + f', \text{ also } f' < f.$$

Da nun bey einem negativen Werth für k $c + d + e + f'$ aus $c + d + e + f + k$ wird, so muß man in obige Gleichung

D 2

$$g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - (r-k)D]$$

und in $\log. D = \log. C - f [\log. (r+1) - \log. r]$

o statt k und f' statt f setzen. Hieraus entsteht:

$$g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - rD]$$

und $\log. D = \log. C - f' \cdot [\log. (r+1) - \log. r]$

also $g \cdot [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - rD] = 10000 \cdot a$

und $(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - rD = 10000 \cdot a : g$

und $(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - 10000 \cdot a : g = rD$

und $\log. [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - 10000 \cdot a : g] = \log. r + \log. D$

oder wenn man den Werth von $\log. D$ hierein setzt:

M. $\log. [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - 10000 \cdot a : g] = \log. r + \log. C - f' \cdot [\log. (r+1) - \log. r]$
 woraus $f' = \frac{\log. r + \log. C - \log. [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - 10000 \cdot a : g]}{\log. (r+1) - \log. r}$

Wird nun dieser Werth von f' bejahend gefunden, so ist 1) $y = c + d + e + f'$; wird $f' = 0$ gefunden, so ist 2) $y = c + d + e$; wird endlich f' negativ, so ist 3) $y < c + d + e$, d. h. die Jahre des Holzschlags endigen sich für einen negativen Werth von f' eher, als die Jahre e verfließen, in welchen sich der Waldbestand nach dem Verhältnisse $q:1$ durch Zuwachs jährlich vermehrt. Dann muß die Untersuchung für diesen Fall dahin zielen, ob die Jahre des Holzschlags sich in einem der Jahre e endigen werden.

Daher setze man III. $y = c + d + e'$, wobey e' nur einen noch unbekannten Theil der gegebenen Jahre e ausdrückt.

Da also bey einem negativen Werth von f' $c + d + e'$ aus $c + d + e + f + k$ wird, so muß man in die Gleichungen

$$g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - (r-k)D]$$

$$\log. D = \log. C - f \cdot [\log. (r+1) - \log. r]$$

$$\log. C = \log. B - e \cdot [\log. (q+1) - \log. q]$$

• statt k und f; und e' statt e setzen.

Diesem zu Folge wird

$$g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r) \cdot C - rD]$$

$$\text{oder } g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - qC + rCD]$$

$$\text{und } \log. D = \log. C, \text{ also } D = C$$

$$\text{und } \log. C = \log. B - e' \cdot [\log. (q+1) - \log. q]$$

Daher wird

$$g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - qC]$$

$$\text{und } (p+1)A - (p-q)B - qC = 10000 \cdot a : g$$

$$\text{und } (p+1)A - (p-q)B - 10000 \cdot a : g = qC$$

$$\text{und } \log. [(p+1)A - (p-q)B - 10000 \cdot a : g] = \log. q + \log. C$$

Setzt man hierein den vorhin gefundenen Werth von $\log. C$, so wird

$$\log. [(p+1)A - (p-q)B - 10000 \cdot a : g] = \log. q + \log. B - e' \cdot [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\text{woraus } e' = \frac{\log. q + \log. B - \log. [(p+1)A - (p-q)B - 10000 \cdot a : g]}{\log. (q+1) - \log. q}$$

N.

wird.

Ergiebt sich nun aus dieser Formel e' bejahend, so ist 1) $y = c + d + e'$; wird aber $e' = 0$, so ist 2) $y = c + d$; wird endlich e' negativ, so ist 3) $y < c + d$, und dann wird der Waldbestand abgeholzet werden, ehe noch die Jahre d , in welchen der Zuwachs mit $p:1$ im Verhältniß steht, verfließen. Wenn dieser Fall eintritt, so setze man

IV. $y = c + d'$, bey welcher Annahme d' noch einen unbekannten Theil der Jahre d anzeigt. Da also bey einem negativen Werth von e' $c + d'$ aus $c + d + e + f + k$ wird, so muß man in die Gleichungen

$$g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - (r-k)D]$$

$$\log. D = \log. C - f \cdot [\log. (r+1) - \log. r]$$

$$\log. C = \log. B - e \cdot [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\text{und } \log. B = \log. A - d \cdot [\log. (p+1) - \log. p]$$

0 statt k , f , e ; und d statt d' setzen, daher wird

$$\log. B = \log. A - d' \cdot [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. C = \log. B$$

$$\log. D = \log. C$$

$$\left. \begin{array}{l} \log. C = \log. B \\ \log. D = \log. C \end{array} \right\} \text{ also } B = C = D$$

$$\text{und } g=10000, a: \left[(p+1)A - [(p-q) + (q-r) + r]B \right]$$

$$\text{oder } g=10000, a: [(p+1)A - p \cdot B]$$

$$\text{also } (p+1)A - pB = 10000, a: g$$

$$\text{und } (p+1)A - 10000, a: g = p \cdot B$$

$$\text{folglich } \log. [(p+1)A - 10000, a: g] = \log. p + \log. B$$

Hierein setze man den eben gefundenen Werth von $\log. B$, so wird

$$\log. [(p+1)A - 10000, a: g] = \log. p + \log. A - d' \cdot [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$O. \quad \text{also } d' = \frac{\log. p + \log. A - \log. [(p+1)A - 10000, a: g]}{\log. (p+1) - \log. p}$$

Wird aus dieser Formel d' bejahend gefunden, so ist $y = c + d'$; findet man aber $d' = 0$, so wird $y = c$, d. h. es wird mit Ablauf von c Jahren das ganze Gehölze schon durch den ersten Holzschlag abgetrieben werden. Findet man endlich d' negativ, so wird $y < c$, d. h. nach Verfluß von c Jahren ist das Gehölz noch nicht so weit angewachsen, daß man den sich vorgesetzten ersten Holzschlag von g Klaffern fallen könnte.

No. XII.

[§. 18.] Ein Waldbestand a wächst in den aufeinander folgenden c, d, e, f Jahren jährlich nach den hier aufeinander folgenden Verhältnissen $m:1, p:1, q:1, r:1$ und hört nach Verfluß der $c+d+e+f$ Jahre auf, einen merklichen Zuwachs zu erhalten. Man soll die Jahre u finden, in welchen a bey seiner gänzlichen Schonung bis auf den größern Waldbestand $= b$ angewachsen wird.

Auflösung.

1) Es werde der gegebene Waldbestand a bey den gegebenen Verhältnissen des Wachstums nach c Jahren zu einem Waldbestande a' , nach $c+d$ Jahren zu a'' , nach $c+d+e$ Jahren zu a''' und endlich nach $c+d+e+f$ Jahren zu a^{iv} , so wird

a) Da der Waldbestand a die ersten c Jahre hindurch jährlich nach dem Verhältnisse $m:1$ anwächst:

$$a' = \frac{(m+1)^c \cdot a}{m^c} \quad (\text{nach Formel D})$$

β) Da der Waldbestand a' durch d Jahre jährlich nach dem Verhältnisse $p:1$ anwächst:

$$a'' = \frac{(p+1)^d \cdot a'}{p^d} = \frac{(p+1)^d \cdot (m+1)^c}{p^d \cdot m^c} \cdot a;$$

γ) Da der Waldbestand a'' durch e Jahre jährlich nach dem Verhältnisse $q:1$ anwächst:

$$a''' = \frac{(q+1)^e \cdot a''}{q^e} = \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot a;$$

δ) Da der Waldbestand a''' durch f Jahre jährlich nach dem Verhältnisse $r:1$ anwächst:

$$a^{iv} = \frac{(r+1)^f \cdot a'''}{r^f} = \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot a$$

2) Wenn man nun hier, wie in No. X.

$$\frac{(m+1)^c}{m^c} = \frac{10000}{A}, \quad \frac{(p+1)^d}{p^d} = \frac{A}{B}, \quad \frac{(q+1)^e}{q^e} = \frac{B}{C}, \quad \frac{(r+1)^f}{r^f} = \frac{C}{D}$$

setzt, so entsteht durch die Multiplication der beyden ersten Gleichungen

$$\frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} = \frac{10000}{A} \cdot \frac{A}{B} = \frac{10000}{B}.$$

Ferner durch die Multiplication der drey ersten Gleichungen

$$\frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} = \frac{10000}{A} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{10000}{C};$$

Endlich durch die Multiplication aller vier Gleichungen

$$\frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f} = \frac{10000}{A} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D} = \frac{10000}{D}$$

3) Diese eben gefundenen Werthe setze man nun in die Formeln von a' , a'' , a''' , a^{iv} so wird

$$a^I = \frac{10000 \cdot a}{A}, \quad a^{II} = \frac{10000 \cdot a}{B}, \quad a^{III} = \frac{10000 \cdot a}{C}, \quad a^{IV} = \frac{10000 \cdot a}{D}$$

Hieraus entsteht

$$A = \frac{10000 \cdot a}{a^I}, \text{ also } \log. A = \log. 10000 + \log. a - \log. a^I,$$

$$\text{ferner } B = \frac{10000 \cdot a}{a^{II}}, \text{ also } \log. B = \log. 10000 + \log. a - \log. a^{II},$$

$$\text{ferner } C = \frac{10000 \cdot a}{a^{III}}, \text{ also } \log. C = \log. 10000 + \log. a - \log. a^{III},$$

$$\text{endlich } D = \frac{10000 \cdot a}{a^{IV}}, \text{ also } \log. D = \log. 10000 + \log. a - \log. a^{IV}$$

4) Aus (2) folgen überdies die schon in No. X. entwickelten Gleichungen

$$\log. A = \log. 10000 - c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. B = \log. A - d. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. C = \log. B - e. [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\log. D = \log. C - f. [\log. (r+1) - \log. r]$$

5) Aus der Vergleichung der Logarithmen von D, in 3 und 4, entsteht:

$$\log. 10000 + \log. a - \log. a^{IV} = \log. C - f. [\log. (r+1) - \log. r].$$

Hieraus entwickle man

$$\text{I. } f = \frac{\log. a^{IV} - \log. a + \log. C - \log. 10000}{\log. (r+1) - \log. r}.$$

Aus der Vergleichung der Logarithmen von C entsteht:

$$\log. 10000 + \log. a - \log. a^{III} = \log. B - e. [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\text{Hieraus folgt II. } e = \frac{\log. a^{III} - \log. a + \log. B - \log. 10000}{\log. (q+1) - \log. q}$$

Ferner folgt aus der Vergleichung der Logarithmen von B

$$\log. 10000 + \log. a - \log. a^{II} = \log. A - d. [\log. (p+1) - \log. p],$$

$$\text{woraus III. } d = \frac{\log. a^{II} - \log. a + \log. A - \log. 10000}{\log. (p+1) - \log. p}$$

Endlich entsteht aus der Vergleichung der Logarithmen von A

$$\log. 10000 + \log. a - \log. a' = \log. 10000 - c, [\log. (m+1) - \log. m]$$

woraus IV. $c = \frac{\log. a' - \log. a}{\log. (m+1) - \log. m}$

folgt.

5) Diese vier letzten Gleichungen mit Hinzuziehung der in No. X. aufgeführten Logarithmen von A, B, C und D dienen nun eigentlich zur Auflösung dieser Aufgabe. Da man nämlich untersuchen soll, in wie viel Jahren $= u$ der Waldbestand a zu einem Waldbestande b anwachsen wird, so versuche man

a) ob dieß etwa in der Periode der f Jahre geschehen werde, und setze daher in die Formel I b statt a^{iv} oder $\log. b$ statt $\log. a^{iv}$. Hierbey werde f zu f' . Leitet man dann aus der Formel

$$f' = \frac{\log. b - \log. a + \log. C - \log. 10000}{\log. (r+1) - \log. r}$$

P.

einen Werth $f' = f$, so giebt dieß zu erkennen, daß der vorgegebene Waldbestand a nach Verfluß der Jahre $u = c + d + e + f$ die Gröfse b erreicht habe.

Führt aber diese Formel auf einen Werth $f' > f$, so sieht man hieraus, daß die Jahre $c + d + e + f$ noch nicht hinreichen den Wald a zu einem Wald b umzuschaffen, oder, wenn die Jahre des Holzzuwachses sich nur auf die Jahre $c + d + e + f$ einschränken, daß der Waldbestand a eine Vermehrung durch eignen Zuwachs bis auf den Betrag b niemals erreichen könne.

Erhält man hingegen aus dieser Formel einen bejahenden Werth $f' < f$, so erreicht der Waldbestand a die Gröfse b nach Verfluß der Jahre $u = c + d + e + f'$.

Ergiebt sich endlich aus dieser Formel ein negativer Werth von f' , so erreicht a nicht in der Periode f das Wachsthum b. Man muß daher versuchen, ob dieß etwa in den vorhergehenden e Jahren geschieht. Zu diesem Ende setze man

β) $\log. b$ statt $\log. a^{iii}$ in die Gleichung II, und es werde e hierdurch zu e' , nämlich

$$e' = \frac{\log. b - \log. a + \log. B - \log. 10000}{\log. (q+1) - \log. q}$$

Q.

E

Nach der Berechnung dieser Formel kann e' entweder $= e$, oder $e' < e$ und bejahend, oder e' verneinend werden. Im ersten Fall wird die gesuchte Anzahl Jahre $u = c + d + e$; im zweyten wird $u = c + d + e'$. Der dritte Fall giebt zu erkennen, daß der Waldbestand a in der Periode von e Jahren das Wachsthum b nicht erreiche, sondern in einer der vorhergehenden Perioden. Bey Eintretung dieses Falles setze man

γ) $\log. b$ statt $\log. a^n$ in die Formel III, und dadurch werde d zu d' , also

$$R. \quad d' = \frac{\log. b - \log. a + \log. A - \log. 10000}{\log. (p+1) - \log. p}$$

Hier wird nun wieder entweder $d' = d$, oder $d' < d$ und bejahend oder d' verneinend. Im ersten Fall wird $u = c + d$, im zweyten $u = c + d'$. Im dritten Fall setze man

δ) $\log. b$ statt $\log. a'$ in die Formel IV und c verändere sich hierbey in c' . Es wird daher

$$c' = \frac{\log. b - \log. a}{\log. (m+1) - \log. m} = u.$$

[§. 19.]

No. XIII.

Durch die Formeln I und K , nämlich durch

$$g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - (r-k)D]$$

$$\text{und } g = Ea : [(p+1)F - (p-q)G - (q-r)H - r+k]$$

wurde der jährliche Holzschlagsbetrag bestimmt, wenn der Forst k Jahre länger, als er noch merklichen Zuwachs hat, ausreichen soll. Sollte hingegen der Forst mit dem Ende seines Wachstums, oder der Jahre $c + d + e + f$, abgeholzet seyn, so muß man in obige Formeln $k = 0$ setzen, und also

$$g = 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - rD,$$

oder welches einerley ist

$$g = Ea : [(p+1)F - (p-q)G - (q-r)H - r]$$

nehmen.

Soll endlich der Waldbestand noch eher abgeholzet werden, als er das Ende seines Wachsthums erreicht, so muß der jährliche Holzschlagsbetrag

$$g > 10000 \cdot a : [(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - rD]$$

$$\text{oder } g > Ea : [(p+1)F - (p-q)G - (q-r)H - r]$$

genommen werden.

No. XIV.

Ein Waldbestand a habe während den Jahren $l = c + d + e + f$ die den Zeit- [§. 21.] läuften c, d, e, f in der nämlichen Ordnung aufeinander folgenden Zuwachsverhältnisse $m:1, p:1, q:1, r:1$. Wie viel Jahre (z) muß der Waldbestand a geschont werden, damit nicht allein nach Ablauf der Schonungszeit z bis zu Ende der l Jahre $l - z + 1$ Holzschläge, von gleicher GröÙe g , abgetrieben werden können, sondern auch noch ein ungefällter Waldbestand t übrig verbleibe. Hier versteht sich von selbst, daß a, g, t nur Klaftern von einerley GröÙe sind.

Vor Erinnerung.

Da diese Aufgabe schon bestimmt angiebt, welches Verhältniß des jährlichen Wachsthums zu jeder der aufeinander folgenden Perioden von c, d, e, f gehört, so wird dieß bey Erwähnung der Jahre c, d, e, f , als eine bekannte Sache, vorausgesetzt, und nicht besonders wiederholt werden. Ferner werden die, nach Verfluß einer jeden der aufeinander folgenden Perioden c, d und e , entstehenden Waldbestände durch die aufeinander folgenden Zeichen a', a'', a''' ausgedrückt werden, es mögen nun in der Dauer irgend einer der genannten Perioden Holzschläge vorfallen oder nicht. Endlich werden auch hier die Verhältnisse $\frac{(m+1)^c}{m^c}, \frac{(p+1)^d}{p^d},$

$\frac{(q+1)^e}{q^e}, \frac{(r+1)^f}{r^f}$ nach der Reihe den Verhältnissen $\frac{E}{F}, \frac{F}{G}, \frac{G}{H}, \frac{H}{I}$ gleichgesetzt, und die Werthe der Buchstaben H, G, F, E aus den logarithmischen Gleichungen:

$$\log. H = f, [\log. (r+1) - \log. r]$$

$$\begin{aligned}\log. G &= \log. H + e \cdot [\log. (q+1) - \log. q] \\ \log. F &= \log. G + d \cdot [\log. (p+1) - \log. p] \\ \log. F &= \log. F + c \cdot [\log. (m+1) - \log. m],\end{aligned}$$

wie in der 2ten Aufl. der Xten Aufgabe, zu ziehen seyn.

Auflösung.

I. Bey diesen Voraussetzungen wird

1) der Waldbestand a nach c jähriger Schonung zu einem Waldbestande

$$a' = \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot a \text{ (Form. D)} = \frac{E}{F} \cdot a;$$

2) wird der Waldbestand a' nach d jähriger Schonung, oder der Waldbestand a , nach $c+d$ jähriger Schonung, zu einem Waldbestande

$$a'' = \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot a' = \frac{F}{G} \cdot a = \frac{F}{G} \cdot \frac{E}{F} \cdot a = \frac{E}{G} \cdot a;$$

3) wird der Waldbestand a'' nach e jähriger Schonung, oder der Waldbestand a nach $c+d+e$ jähriger Schonung zu einem Waldbestande

$$a''' = \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot a'' = \frac{G}{H} \cdot a'' = \frac{G}{H} \cdot \frac{E}{G} \cdot a = \frac{E}{H} \cdot a.$$

II. Die zu bestimmende Anzahl Jahre $= z$ möge sich nun

1) bis in die Periode der f Jahre erstrecken, so wird der Waldbestand a während $(c+d+e) + (z-c-d-e)$ Jahren mit Holzschlägen verschont, und leidet in den darauf folgenden $c+d+e+f-z$ Jahren $c+d+e+f-z+1$ Holzschläge.

Der Waldbestand a wird nun nach $c+d+e$ jähriger Schonung zu einem Waldbestande

$$a''' = \frac{E}{H} \cdot a \text{ (I. 3.)}$$

Dieser Waldbestand a''' wird nach $z-c-d-e$ jähriger Schonung, bey dem Wachstumsverhältnisse $r:1$, zu einem Waldbestande

$$\frac{(r+1)^{z-c-d-e}}{r^{z-c-d-e}} \cdot a^{\text{III}} (\text{Form. D}) = \frac{(r+1)^{z-c-d-e}}{r^{z-c-d-e}} \cdot \frac{E}{H} \cdot a = \alpha,$$

und dieser Waldbestand α wird nach $c+d+e+f-z+1$ wiederholten Holzschlägen, bey dem Wachsthumverhältnisse $r:1$, zu einem Waldbestande

$$\begin{aligned} &= rg - (r+1)^{c+d+e+f-z} \cdot \left[(r+1)g - \alpha \right] : r^{c+d+e+f-z} \quad (\text{n. Form. A}) \\ &= rg - (r+1)^{c+d+e+f-z} \cdot \left[(r+1)g - \frac{(r+1)^{z-c-d-e}}{r^{z-c-d-e}} \cdot \frac{E}{H} \cdot a \right] : r^{c+d+e+f-z} \\ &= rg - \frac{(r+1)^{c+d+e+f-z} \cdot (r+1) \cdot g}{r^{c+d+e+f-z}} + \frac{(r+1)^{c+d+e+f-z} \cdot (r+1)^{z-c-d-e}}{r^{c+d+e+f-z} \cdot r^{z-c-d-e}} \cdot \frac{E}{H} \cdot a \\ &= rg - \frac{(r+1)^{c+d+e-z} \cdot (r+1)^f \cdot (r+1) \cdot g}{r^{c+d+e-z} \cdot r^f} + \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot \frac{E}{H} \cdot a \\ &= rg - \frac{(r+1)^{c+d+e-z}}{r^{c+d+e-z}} \cdot (r+1) \cdot Hg + H \cdot \frac{E}{H} \cdot a \\ &= rg - (r+1)^{-(z-c-d-e)} \cdot r^{z-c-d-e} \cdot (r+1)Hg + Ea = t, \end{aligned}$$

$$\text{also } Ea + rg - t = r^{z-c-d-e} \cdot (r+1)^{-(z-c-d-e)} \cdot (r+1) \cdot Hg$$

$$\text{folglich } \log. [Ea + rg - t] = (z-c-d-e) \log. r - (z-c-d-e) \log. (r+1) + \log. (r+1) + \log. H + \log. g$$

$$\text{oder } \log. [Ea + rg - t] = (z-c-d-e) [\log. r - \log. (r+1)] + \log. (r+1) + \log. H + \log. g$$

$$\text{folglich } (z-c-d-e) \cdot [\log. (r+1) - \log. r] = \log. g + \log. (r+1) + \log. H - \log. [Ea + rg - t]$$

$$\text{also } z-c-d-e = \frac{\log. g + \log. (r+1) + \log. H - \log. (Ea + rg - t)}{\log. (r+1) - \log. r}$$

S.

III. Wenn sich z nur bis in die Periode der e Jahre erstreckt, so wird der Waldbestand a während $(c+d) + (z-c-d)$ Jahren mit Holzschlägen verschont, in den darauf folgenden $c+d+e-z$ Jahren aber, nach deren Verfluß sich die Periode der e Jahre endigt, leidet er $c+d+e-z+1$ Holzschläge, und in der darauf folgenden letzten Periode von f Jahren f Holzschläge.

Nun wird der Waldbestand a nach $c+d$ jähriger Schonung zu einem Waldbestande

$$a^{\text{II}} = \frac{E}{G} \cdot a \quad (\text{I. 2.})$$

Dieser Waldbestand a'' wird nach $z-c-d$ jähriger Schonung bey dem Wachstumsverhältnisse $q:1$ zu einem Waldbestande

$$\beta = \frac{(q+1)^{z-c-d}}{q^{z-c-d}} \cdot a'' \text{ (Form. D)} = \frac{(q+1)^{z-c-d}}{q^{z-c-d}} \cdot \frac{E}{G} \cdot a$$

Von diesem Waldbestande β verbleibt nach $c+d+e-z+1$ wiederholten Holzschlägen, bey dem Wachstumsverhältnisse $q:1$, ein Waldbestand

$$\begin{aligned} &= qg - (q+1)^{c+d+e-z} \cdot [(q+1)g - \beta] : q^{c+d+e-z} \\ &= qg - (q+1)^{c+d+e-z} \cdot \left[(q+1)g - \frac{(q+1)^{z-c-d}}{q^{z-c-d}} \cdot \frac{E}{G} \cdot a \right] : q^{c+d+e-z} \\ &= qg - \frac{(q+1)^{c+d+e-z} \cdot (q+1)g}{q^{c+d+e-z}} + \frac{(q+1)^{c+d+e-z} \cdot (q+1)^{z-c-d} \cdot E \cdot a}{q^{c+d+e-z} \cdot q^{z-c-d} \cdot G} \\ &= qg - \frac{(q+1)^{c+d-z} \cdot (q+1)^e \cdot (q+1)g}{q^{c+d-z} \cdot q^e} + \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot \frac{E}{G} \cdot a \\ &= qg - \frac{(q+1)^{c+d-z}}{q^{c+d-z}} \cdot \frac{G}{H} \cdot (q+1)g + \frac{G}{H} \cdot \frac{E}{G} \cdot a \\ &= qg - (q+1)^{-(z-c-d)} \cdot q^{z-c-d} \cdot \frac{G}{H} \cdot (q+1)g + \frac{E}{H} \cdot a = a''' \end{aligned}$$

Hieraus wird

$$Hqg - (q+1)^{-(z-c-d)} \cdot q^{z-c-d} \cdot G(q+1)g + Ea = Ha'''$$

Ferner wird der Waldbestand a''' nach f Jahren und eben so viel Holzschlägen zu einem Waldbestand

$$\begin{aligned} &= rg - (r+1)^f \cdot [rg - a'''] : r^f \text{ (nach Form. C)} \\ &= rg - \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot rg + \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot a''' \\ &= rg - Hrg + Ha''' = t \end{aligned}$$

Zu dieser Gleichung addire man die zuletzt gefundene Gleichung

$$Hqg - (q+1)^{-(z-c-d)} \cdot q^{z-c-d} \cdot G \cdot (q+1)g + Ea = Ha'''$$

so wird $rg + Hqg - Hrg + Ea - (q+1)^{-(z-c-d)} \cdot q^{z-c-d} \cdot G \cdot (q+1)g + Ha''' = t + Ha'''$

und $rg + (q-r)Hg + Ea - (q+1)^{-(z-c-d)} \cdot q^{z-c-d} \cdot G \cdot (q+1) \cdot g = t$

und $Ea + (q-r)Hg + rg - t = q^{z-c-d} \cdot (q+1)^{-(z-c-d)} \cdot G \cdot (q+1) \cdot g$

und $\log.[Ea + (q-r)Hg + rg - t] = (z-c-d) \cdot \log q - (z-c-d) \log(q+1) + \log G + \log(q+1) + \log g$

und $(z-c-d) \cdot [\log(q+1) - \log q] = \log g + \log(q+1) + \log G - \log[Ea + (q-r)Hg + rg - t]$

also $z-c-d = \frac{\log g + \log(q+1) + \log G - \log[Ea + (q-r)Hg + rg - t]}{\log(q+1) - \log q}$

7.

IV. Wenn sich z nur bis in die Periode der d Jahre erstreckt, so wird der Waldbestand a während $c + (z-c)$ Jahren mit Holzschlägen verschont; in den darauf folgenden $c + d - z$ Jahren aber, nach deren Verfluss sich die Periode von d Jahren endigt, mit $c + d - z + 1$ Holzschlägen, und in den beyden letzten Perioden mit so viel Holzschlägen angegriffen, als diese Perioden zusammen Jahre enthalten.

Der Waldbestand a wird nun nach c jähriger Schonung zu einem Waldbestande

$$a^1 = \frac{E}{F} \cdot a \quad (I, 1.)$$

Dieser Waldbestand a^1 wird nach $z - c$ jähriger Schonung, bey dem Wachsthumverhältnisse $p:1$, zu einem Waldbestand

$$\gamma = \frac{(p+1)^{z-c}}{p^{z-c}} \cdot a^1 \quad (\text{Form. } D) = \frac{(p+1)^{z-c}}{p^{z-c}} \cdot \frac{E}{F} \cdot a$$

und dieser Waldbestand γ wird nach $c + d - z + 1$ wiederholten Holzschlägen, bey dem Wachsthumverhältnisse $p:1$, zu einem Waldbestand

$$= pg - (p+1)^{c+d-z} \cdot [(p+1)g - \gamma] : p^{c+d-z}$$

$$= pg - (p+1)^{c+d-z} \cdot \left[(p+1)g - \frac{(p+1)^{z-c}}{p^{z-c}} \cdot \frac{E}{F} \cdot a \right] : p^{c+d-z}$$

$$= pg - \frac{(p+1)^{c+d-z} \cdot (p+1)g}{p^{c+d-z}} + \frac{(p+1)^{c+d-z} \cdot (p+1)^{z-c} \cdot Ea}{p^{c+d-z} \cdot p^{z-c} \cdot F}$$

$$= pg - \frac{(p+1)^{c-z} \cdot (p+1)^d \cdot (p+1) \cdot g}{p^{c-z} \cdot d^d} + \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{E}{F} \cdot a$$

$$= pg - \frac{(p+1)^{c-z}}{p^{c-z}} \cdot \frac{F}{G} \cdot (p+1)g + \frac{F}{G} \cdot \frac{E}{F} \cdot a$$

$$= pg - p^{z-c} \cdot (p+1)^{-(z-c)} \cdot \frac{F}{G} \cdot (p+1)g + \frac{E}{G} \cdot a = a''$$

$$\text{also } Gpg - p^{z-c} \cdot (p+1)^{-(z-c)} \cdot F \cdot (p+1) \cdot g + E \cdot a = Ga'' \quad (1)$$

Ferner wird der Waldbestand a'' nach Verfluß der Periode von e Jahren und nach e wiederholten Holzschlägen zu einem Waldbestande

$$= qg - (q+1)^e [qg - a''] : q^e \quad (\text{n. Form. C})$$

$$= qg - \frac{(q+1)^e \cdot q \cdot g}{q^e} + \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot a''$$

$$= qg - \frac{G}{H} \cdot qg + \frac{G}{H} \cdot a'' = a'''$$

$$\text{also } Hqg - Gqg + Ga'' = Ha''' \quad (2)$$

Endlich wird der Waldbestand a''' nach f Jahren und eben so viel wiederholten Holzschlägen zu einem Waldbestand

$$= rg - (r+1)^f \cdot (rg - a''') : r^f \quad (\text{n. Form. C})$$

$$= rg - \frac{(r+1)^f \cdot rg}{r^f} + \frac{(r+1)^f \cdot a'''}{r^f}$$

$$= rg - Hrg + Ha''' = t \quad (3)$$

Wenn man nun die Gleichungen 1, 2 und 3, nämlich

$$Gpg - p^{z-c} \cdot (p+1)^{-(z-c)} \cdot F \cdot (p+1) \cdot g + Ea = Ga'' \quad (1)$$

$$Hqg - Gqg + Ga'' = Ha''' \quad (2)$$

$$rg - Hrg + Ha''' = t \quad (3)$$

addirt, auf beyden Seiten die gleichen Größen Ga'' , Ha''' wegläfst, und die gehörige Zusammenziehung anbringt, so wird

$$rg + (q-r)Hg + (p-q)Gg + Ea - p^{z-c} \cdot (p+1)^{-(z-c)} \cdot F(p+1)g = t$$

$$\text{und } Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t = p^{z-c} \cdot (p+1)^{-(z-c)} \cdot F \cdot (p+1)g$$

$$\text{u. } \log.[Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t] = (z-c)\log p - (z-c)\log(p+1) + \log F + \log(p+1) + \log g$$

$$\text{und } (z-c) \cdot [\log(p+1) - \log p] = \log g + \log(p+1) + \log F - \log[Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]$$

$$\text{also } z-c = \frac{\log. g + \log. (p+1) + \log. F - \log. [Ea + (p-q)Gg + (q-1)Hg + rg - t]}{\log. (p+1) - \log. p} \quad U.$$

V. Wenn z kleiner ist, als c , so wird der Waldbestand a nach z jähriger Schonung, bey dem Wachsthumverhältnisse $m:1$, zu einem Waldbestande

$$\delta = -\frac{(m+1)^z}{m^z} \cdot a.$$

Dieser Waldbestand δ wird nun in den darauf folgenden $c-z$ Jahren, bey dem Wachsthumverhältnisse $m:1$, mit $c-z+1$ Holzschlägen angegriffen, und wird daher nach Verfluß der $c-z$ Jahre zu einem Waldbestand

$$\begin{aligned} &= mg - (m+1)^{c-z} \cdot [(m+1)g - \delta] : m^{c-z} \\ &= mg - (m+1)^{c-z} \cdot \left[(m+1)g - \frac{(m+1)^z}{m^z} \cdot a \right] : m^{c-z} \\ &= mg - \frac{(m+1)^{c-z}}{m^{c-z}} \cdot (m+1)g + \frac{(m+1)^{c-z} \cdot (m+1)^z \cdot a}{m^{c-z} \cdot m^z} \\ &= mg - \frac{E}{F} \cdot \frac{(m+1)^{-z}}{m^{-z}} \cdot (m+1)g + \frac{E}{F} \cdot a \\ &= mg - \frac{E}{F} \cdot m^z \cdot (m+1)^{-z} \cdot (m+1)g + \frac{E}{F} \cdot a = a' \end{aligned}$$

$$\text{Also } Fmg - Em^z \cdot (m+1)^{-z} \cdot (m+1) \cdot g + Ea = F \cdot a' \quad (1.)$$

Ferner wird der Waldbestand a' nach d Jahren und eben so viel wiederholten Holzschlägen zu einem Waldbestand

$$\begin{aligned} &= pg - (p+1)^d \cdot [pg - a'] : p^d \quad (\text{nach Form. C.}) \\ &= pg - \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot pg + \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot a' \\ &= pg - \frac{F}{G} \cdot pg + \frac{F}{G} \cdot a' = a''. \end{aligned}$$

$$\text{Also } Gpg - Fpg + Fa' = Ga'' \quad (2.)$$

Ferner wird der Waldbestand a'' nach e Jahren und eben so viel wiederholten Holzschlägen zu einem Waldbestande

$$= qg - (q+1)^e \cdot [qg - a''] : q^e \quad (\text{nach Form. C.})$$

$$= qg - \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot qg + \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot a''$$

$$= qg - \frac{G}{H} \cdot qg + \frac{G}{H} \cdot a'' = a'''.$$

$$\text{Also } Hqg - Gqg + Ga'' = Ha''' \quad (3.)$$

Endlich wird der Waldbestand a''' nach f Jahren und eben so viel wiederholten Holzschlägen zu einem Waldbestand

$$= rg - (r+1)^f \cdot [rg - a'''] : r^f \quad (\text{nach Form. C.})$$

$$= rg - \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot rg + \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot a'''$$

$$= rg - Hrg + Ha''' = t \quad (4.)$$

Man addire nun diese vier gefundenen Gleichungen, nämlich

$$Fmg - Em^z \cdot (m+1)^{-z} \cdot (m+1) \cdot g + Ea = Fa'$$

$$Gpg - Fpg + Fa' = Ga''$$

$$Hqg - Gqg + Ga'' = Ha'''$$

$$rg - Hrg + Ha''' = t$$

so wird $rg + (q-r)Hg + (p-q)Gg + (m-p)Fg + Ea - Em^z \cdot (m+1)^{-z} \cdot (m+1)g = t$

und $Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t = Em^z \cdot (m+1)^{-z} \cdot (m+1)g$

u. $\log.[Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t] = \log.E + z \log.m - z \log.(m+1) + \log.(m+1) + \log.g$

u. z. $[\log.(m+1) \cdot \log.m] = \log.g + \log.(m+1) + \log.E - \log.[Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]$

$$V. \text{ also } z = \frac{\log.g + \log.(m+1) + \log.E - \log.[Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]}{\log.(m+1) - \log.m}$$

VI. Die Formeln S , T , U , V enthalten nun die wahre Auflösung unserer Aufgabe.

Nachdem man nämlich die Werthe der Buchstaben H , G , F und E nach den im Eingange dieser Auflösung angeführten Gleichungen bestimmt hat, so berechne man

1) aus der Formel S :

$$z-c-d-e = \frac{\log.g + \log.(r+1) + \log.H - \log.(Ea + rg - t)}{\log.(r+1) - \log.r}$$

den Werth von $z-c-d-e$.

Findet man nun hieraus $z-c-d-e > f$, so wird auch $z > c+d+e+f$ oder $z > 1$, und dieses ist ein gewisses Zeichen, daß g zu groß und also angenommen worden, daß der immerzu geschonte Waldbestand a den Betrag t in 1 Jahren gar nicht erreichen werde.

Ist eben dieser Waldbestand bejahend, jedoch kleiner als f , z. B. $z-c-d-e = f'$ so wird $z = c+d+e+f' =$ der Anzahl Jahre, die der Waldbestand a geschont werden muß, ehe man ihn mit einem Holzschlag angreifen kann.

Findet sich aber, daß $z-c-d-e$ kleiner als Nichts, d. i. verneinend ausfällt, so giebt dies zu erkennen, daß sich z nur bis in irgend eine der vorhergehenden Perioden erstrecke. In diesem Falle berechne man

2) aus der Formel T:

$$z-c-d = \frac{\log.g + \log.(q+1) + \log.G - \log.[Ea + (q-r)Hg + rg - t]}{\log.(q+1) - \log.q}$$

den Werth von $z-c-d$. Findet man diesen bejahend z. B. $z-c-d = e'$, so wird die gesuchte Anzahl Jahre der Schonung, nämlich $z = c+d+e'$.

Wäre aber auch dieser Werth für $z-c-d$ verneinend, so wird

3) zur Berechnung des folgenden:

$$z-c = \frac{\log.g + \log.(p+1) \log.F - \log.[Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]}{\log.(p+1) - \log.p}$$

fortgegangen.

Wird dieser Werth bejahend z. B. $z-c = d'$ gefunden, so wird $z = c+d'$; ist hingegen $z-c$ verneinend, so ist $z < c$, nämlich

$$4) z = \frac{\log.g + \log.(m+1) + \log.E - \log.[Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]}{\log.(m+1) - \log.m}$$

Wird hierinne der Zähler

$\log. g + \log. (m+1) + \log. E - \log. [Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t] = 0$
 also $\log. [Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t] = \log. g + \log. (m+1) + \log. E$,
 oder, wenn man die Logarithmen wieder aufhebt,

$Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t = (m+1).Eg$,
 und daher $Ea - (m+1)Eg + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t = 0$
 so ist $z = 0$, und es wird sogleich mit dem ersten Holzschlage ohne Aufschub der
 Anfang gemacht.

Wird endlich dieser Zähler

$\log. g + \log. (m+1) \log. E - \log. [Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]$
 negativ, d. h. wird

$\log. [Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t] > \log. g + \log. (m+1) + \log. E$,
 oder, wenn man die Logarithmen aufhebt,

$Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t > (m+1)Eg$
 oder $Ea - t > (m+1)Eg - (m-p)Fg - (p-q)Gg - (q-r)Hg - rg$
 oder endlich: $(Ea - t):g > (m+1)E - (m-p)F - (p-q)G - (q-r)H - r$
 so wird die ganze Auflösung unmöglich.

Anmerkung.

Die hier entwickelten Formeln

$$1) Ea - (m+1)Eg + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t = 0$$

$$2) (Ea - t):g > (m+1).E - (m-p)F - (p-q)G - (q-r)H - r$$

welche Hr. v. O. am Ende des 21. §. aufstellt, können beyde auf eine gebracht werden. Denn die zweyte Formel, welche die Unmöglichkeit der Auflösung anzeigt, entstand, nach obiger Entwicklung, aus

$$Ea - t > (m+1)Eg - (m-p)Fg - (p-q)Gg - (q-r)Hg - rg.$$

Hieraus folgt aber

$$Ea - (m+1)Eg + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t > 0.$$

Daher setze man

$$IV. Ea - (m+1).Eg + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t = x$$

und berechne in jedem Falle hieraus den Werth von x , ehe man zu den andern Formeln übergeht. Findet man hieraus x positiv, so ist die Auflösung unmöglich, und die Data in der Aufgabe passen nicht zusammen. Wird $x=0$, so folgt hieraus unmittelbar, daß auch $z=0$ ist, und es wird sogleich mit dem ersten Holzschlage ohne Aufschub der Anfang gemacht. Wenn einer von diesen beyden Fällen eintritt, so hat man gar nicht nöthig die Formeln S , T , U und V zu berechnen. Fände man aber x negativ, so kann man dann, wie oben gezeigt worden, den Werth von z durch die Formeln S , T , U und V bestimmen.

No. XV.

Der Waldbestand eines Forstes $=a$ wird h Jahre geschont, soll aber hernach in $l-h$ [§. 22.] Jahren durch $l-h+1$ Holzschläge von gleichem Ertrage g bis auf einen gegebenen Holzbetrag t abgeholzet werden; vorausgesetzt l werde in c, d, e, f Jahre zerlegt, und diesen Perioden entsprächen in eben der aufeinander folgenden Ordnung die Zuwachsverhältnisse $m:1, p:1, q:1$ und $r:1$. Man soll den Betrag g des jährlichen Holzschlags durch Rechnung bestimmen.

Vor Erinnerung.

Man wird sich zur Auflösung dieser Aufgabe, der in voriger Auflösung gefundenen vier Formeln S, T, U und V bedienen. Da nun in demselben die Buchstaben E, F, G und H vorkommen, so sind die Werthe derselben auch hier aus den in No. X. schon angeführten Gleichungen, nämlich aus

$$\begin{aligned}\log. H &= f. [\log. (r+1) - \log. r] \\ \log. G &= \log. H + e. [\log. (q+1) - \log. q] \\ \log. F &= \log. G + d. [\log. (p+1) - \log. p] \\ \log. E &= \log. F + c. [\log. (m+1) - \log. m]\end{aligned}$$

zu bestimmen.

Auflösung.

I. Wenn die gegebene Anzahl Jahre, durch deren Dauer der Waldbestand a geschont werden soll, sich bis in die vierte Periode von f Jahren erstreckt, so wird

man den Betrag von g aus der Formel S finden, wenn man h statt z setzt. Es wird alsdann

$$h-c-d-e = \frac{\log. g + \log. (r+1) + \log. H - \log. [Ea + rg - t]}{\log. (r+1) - \log. r}$$

und $(h-c-d-e) \cdot [\log. (r+1) - \log. r] = \log. g + \log. (r+1) + \log. H - \log. [Ea + rg - t]$,
und, wenn man die Logarithmen wieder aufhebt

$$\frac{(r+1)^{h-c-d-e}}{r^{h-c-d-e}} \cdot [Ea + rg - t] = (r+1) H g;$$

$$\text{es ist aber } H = \frac{(r+1)^f}{r^f}$$

$$\text{folglich } \frac{(r+1)^{h-c-d-e}}{r^{h-c-d-e}} \cdot [Ea + rg - t] = (r+1) \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot g$$

und, wenn man durch $\frac{(r+1)^f}{r^f}$ dividirt,

$$\frac{(r+1)^{h-c-d-e} \cdot (r+1)^{-f}}{r^{h-c-d-e} \cdot r^{-f}} \cdot (Ea + rg - t) = (r+1) g$$

$$\text{oder } \frac{(r+1)^{h-c-d-e-f}}{r^{h-c-d-e-f}} \cdot (Ea + rg - t) = (r+1) g$$

und da $c+d+e+f=1$, so ist

$$\frac{(r+1)^{h-1}}{r^{h-1}} \cdot (Ea + rg - t) = (r+1) g,$$

$$\text{da ferner } \frac{(r+1)^{h-1}}{r^{h-1}} = \frac{(r+1)^{-(h-1)}}{r^{-(h-1)}} = \frac{r^{1-h}}{(r+1)^{1-h}}$$

$$\text{so ist } \frac{r^{1-h}}{(r+1)^{1-h}} \cdot (Ea + rg - t) = (r+1) g$$

$$\text{und } r^{1-h} \cdot (Ea + rg - t) = (r+1) (r+1)^{1-h} g$$

$$\text{oder } r^{1-h} \cdot Ea + r^{1-h} \cdot rg - r^{1-h} \cdot t = (r+1) \cdot (r+1)^{1-h} g$$

$$\text{und } r^{1-h} \cdot Ea - r^{1-h} \cdot t = (r+1) \cdot (r+1)^{1-h} g - r^{1-h} \cdot rg$$

$$\text{oder } r^{1-h} \cdot (Ea - t) = [(r+1) (r+1)^{1-h} - r^{1-h} \cdot r] \cdot g$$

$$\text{also } Ea - t = \left[\frac{(r+1) \cdot (r+1)^{1-h} - r^{1-h} \cdot r}{r^{1-h}} \right] \cdot g$$

$$\text{oder } Ea - t = \left[\frac{(r+1) \cdot (r+1)^{l-h}}{r^{l-h}} - r \right] \cdot g$$

$$\text{also } g = \frac{Ea - t}{\frac{(r+1) \cdot (r+1)^{l-h}}{r^{l-h}} - r}$$

Hierinne setze man $\frac{(r+1) \cdot (r+1)^{l-h}}{r^{l-h}} = M$,

so wird $\log.(r+1) + (l-h) \cdot \log.(r+1) - (l-h) \cdot \log.r = \log.M$

oder $\log.(r+1) + (l-h) \cdot [\log.(r+1) - \log.r] = \log.M$

Aus dieser Gleichung bestimme man die Zahl M , so findet man alsdenn

$$\text{den Betrag } g = \frac{Ea - t}{M - r}$$

X.

II. Wenn sich h bis in die dritte Periode von e Jahren erstreckt, so setze man in die Formel $T z = h$, so wird

$$h - c - d = \frac{\log.g + \log.(q+1) + \log.G - \log.[Ea + (q-r)Hg + rg - t]}{\log.(q+1) - \log.q}$$

und $(h-c-d) \cdot [\log.(q+1) - \log.q] = \log.g + \log.(q+1) + \log.G - \log.[Ea + (q-r)Hg + rg - t]$

und, wenn man die Logarithmen wieder aufhebt,

$$\frac{(q+1)^{h-c-d}}{q^{h-c-d}} = \frac{(q+1)Gg}{Ea + (q-r)Hg + rg - t}$$

$$\text{oder } \frac{(q+1)^{h-c-d} \cdot (q+1)^{-e} \cdot (q+1)^e}{q^{h-c-d} \cdot q^{-e} \cdot q^e} = \frac{(q+1)Gg}{Ea + (q-r)Hg + rg - t}$$

$$\text{oder } \frac{(q+1)^{h-c-d-e} \cdot (q+1)^e}{q^{h-c-d-e} \cdot q^e} = \frac{(q+1)Gg}{Ea + (q-r)Hg + rg - t}$$

oder, da nach No. X. $\frac{(q+1)^e}{q^e} = \frac{G}{H}$, so ist

$$\frac{(q+1)^{h-c-d-e}}{q^{h-c-d-e}} \cdot \frac{G}{H} = \frac{(q+1)Gg}{Ea + (q-r)Hg + rg - t}$$

oder, wenn man durch $\frac{H}{G}$ multiplicirt

$$\frac{(q+1)^{h-c-d-e}}{q^{h-c-d-e}} = \frac{(q+1)Hg}{Ea+(q-r)Hg+rg-t}$$

$$\text{oder } \left(\frac{q+1}{q}\right)^{h-c-d-e} = \frac{(q+1)Hg}{Ea+(q-r)Hg+rg-t}$$

$$\text{oder } \left(\frac{q+1}{q}\right)^{-(c+d+e-h)} = \frac{(q+1)Hg}{Ea+(q-r)Hg+rg-t}$$

$$\text{und } [Ea+(q-r)Hg+rg-t] \cdot \left(\frac{q+1}{q}\right)^{-(c+d+e-h)} = (q+1)Hg$$

$$\text{oder } \frac{Ea+(q-r)Hg+rg-t}{\left(\frac{q+1}{q}\right)^{c+d+e-h}} = (q+1)Hg$$

$$\text{und } Ea+(q-r)Hg+rg-t = (q+1) \cdot \left(\frac{q+1}{q}\right)^{c+d+e-h} \cdot Hg$$

$$\text{und } Ea-t = (q+1) \cdot \left(\frac{q+1}{q}\right)^{c+d+e-h} \cdot Hg - (q-r)Hg - rg$$

$$\text{oder } Ea-t = \left[(q+1) \cdot \left(\frac{q+1}{q}\right)^{c+d+e-h} \cdot H - (q-r)H - r \right] \cdot g$$

$$\text{folglich } g = \frac{Ea-t}{(q+1) \cdot \left(\frac{q+1}{q}\right)^{c+d+e-h} \cdot H - (q-r)H - r}$$

Da nun diese Formel für die Berechnung noch sehr unbequem ist, so setze man hierinne $(q+1) \cdot \left(\frac{q+1}{q}\right)^{c+d+e-h} = L$, nehme hiervon die Logarithmen, und berechne alsdenn den Werth von L aus

$$\log.(q+1) + (c+d+e-h) \cdot [\log.(q+1) - \log.q] = \log.L$$

so findet man hierauf

2. den Betrag $g = \frac{Ea-t}{HL - (q-r)H - r}$

III. Wenn sich h nur bis in die zweyte Periode von d Jahren erstreckt, so setze man in die Formel $Uz=h$, so wird

$$h-c = \frac{\log. g + \log. (p+1) + \log. F - \log. [Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]}{\log. (p+1) - \log. p}$$

und $(h-c) \cdot [\log. (p+1) - \log. p] = \log. g + \log. (p+1) + \log. F - \log. [Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]$

und, wenn man die Logarithmen wieder aufhebt

$$\frac{(p+1)^{h-c}}{p^{h-c}} = \frac{(p+1)Fg}{Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t}$$

$$\text{und } \frac{(p+1)^{h-c} \cdot (p+1)^{-d} \cdot (p+1)^d}{p^{h-c} \cdot p^{-d} \cdot p^d} = \frac{(p+1)Fg}{Ea + (p-q)Gg + (q-r)Gg + rg - t}$$

$$\text{oder } \frac{(p+1)^{h-c-d}}{p^{h-c-d}} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} = \frac{(p+1)Fg}{Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t}$$

$$\text{oder } \frac{(p+1)^{h-c-d}}{p^{h-c-d}} \cdot \frac{F}{G} = \frac{(p+1)Fg}{Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t}$$

und, wenn man durch $\frac{G}{F}$ multiplicirt,

$$\frac{(p+1)^{h-c-d}}{p^{h-c-d}} = \frac{(p+1)Gg}{Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t}$$

$$\text{da nun } \frac{(p+1)^{h-c-d}}{p^{h-c-d}} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{h-c-d} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{-(c+d-h)} = \frac{1}{\left(\frac{p+1}{p}\right)^{c+d-h}}$$

$$\text{also } \frac{1}{\left(\frac{p+1}{p}\right)^{c+d-h}} = \frac{(p+1)Gg}{Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t},$$

$$\text{so ist } \frac{Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t}{\left(\frac{p+1}{p}\right)^{c+d-h}} = (p+1)Gg$$

$$\text{und } Ea + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t = (p+1) \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)^{c+d-h} \cdot Gg$$

$$\text{folglich } Ea - t = (p+1) \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)^{c+d-h} \cdot Gg - (p-q)Gg - (q-r)Hg - rg$$

$$\text{oder } Ea - t = \left[(p+1) \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)^{c+d-h} \cdot G - (p-q)G - (q-r)H - r \right] \cdot g$$

$$\text{woraus } g = \frac{Ea - t}{(p+1) \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)^{c+d-h} \cdot G - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

$$\text{Hierinne setze man } (p+1) \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)^{c+d-h} = K.$$

Nimmt man hiervon die Logarithmen, so wird

$$\log.(p+1) + (c+d-h) \cdot [\log.(p+1) - \log.p] = \log.K$$

woraus man den Werth von K, und alsdann aus

$$Z. \quad g = \frac{Ea - t}{KG - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

den Betrag bestimmen kann.

IV. Wenn sich endlich h nur bis in die erste Periode erstreckt, so setze man in die Formel $V \quad z=h$, so wird

$$h = \frac{\log.g + \log.(m+1) + \log.E - \log.[Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]}{\log.(m+1) - \log.m}$$

und h. $[\log.(m+1) - \log.m] = \log.g + \log(m+1) + \log.E - \log.[Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t]$

und, wenn man die Logarithmen aufhebt,

$$\frac{(m+1)^h}{m^h} = \frac{(m+1)Eg}{Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t}$$

$$\text{oder da } \frac{(m+1)^h}{m^h} = \frac{(m+1)^h \cdot (m+1)^{-c} \cdot (m+1)^c}{m^h \cdot m^{-c} \cdot m^c} = \frac{(m+1)^{h-c} \cdot (m+1)^c}{m^{h-c} \cdot m^c} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{h-c} \cdot \frac{E}{F}$$

$$(\text{wegen No. X.}) = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{-(c-h)} \cdot \frac{E}{F} = \frac{1}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{c-h}} \cdot \frac{E}{F}, \text{ so wird}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{c-h}} \cdot \frac{E}{F} = \frac{(m+1) \cdot Eg}{Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t}$$

und, wenn man durch $\frac{F}{E}$ multiplicirt,

$$\frac{I}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{c-h}} = \frac{(m+1)Fg}{Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t}$$

$$\text{und } \frac{Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{c-h}} = (m+1)Fg$$

$$\text{und } Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg - t = (m+1) \cdot \left(\frac{m+1}{m}\right)^{c-h} \cdot Fg$$

$$\text{und } Ea - t = (m+1) \cdot \left(\frac{m+1}{m}\right)^{c-h} \cdot Fg - (m-p)Fg - (p-q)Gg - (q-r)Hg - rg$$

$$\text{oder } Ea - t = \left[(m+1) \cdot \left(\frac{m+1}{m}\right)^{c-h} \cdot F - (m-p)F - (p-q)G - (q-r)H - r \right] \cdot g$$

$$\text{Hieraus wird } g = \frac{Ea - t}{(m+1) \cdot \left(\frac{m+1}{m}\right)^{c-h} \cdot F - (m-p)F - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

$$\text{Hierinne setze man } (m+1) \left(\frac{m+1}{m}\right)^{c-h} = I, \text{ so wird}$$

$$\log. (m+1) + (c-h) \cdot [\log. (m+1) - \log. m] = \log. I$$

Hat man hieraus den Werth von I bestimmt, so wird alsdenn

$$g = \frac{Ea - t}{IF - (m-p)F - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

A'.

No. XVI.

Einem Waldbestande *a* gehören in den aufeinander folgenden Zeitperioden von [§. 25. *c*, *d*, *e* und *f* Jahren, die in eben der Ordnung aufeinander folgenden Zuwachs- u. 26.] verhältnisse *m*:1, *p*:1, *q*:1 und *r*:1 zu. Dieser Waldbestand *a* soll die ersten *h* Jahre hindurch mit Holzschlägen verschont und dann jährlich mit einem Holzschlage = *g* angegriffen werden. Man sucht den Waldbestand = *T*, der nach dem Ablaufe der *c*+*d*+*e*+*f*=1 Jahre noch übrig verbleibt, nachdem der jährliche Holzschlag = *g* 1—*h*+1 mal wiederholt worden ist.

Erste Auflösung.

1) Wenn $h < c$ ist.

Man setze T statt t in die Formel A' , so wird

$$g = \frac{Ea - T}{FI - (m-p)F - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

B' . woraus $T = Ea - FIg + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg$

2) Wenn $h > c$ und $< c+d$ ist.

Man setze T statt t in die Formel Z , so wird

$$g = \frac{Ea - T}{GK - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

C' . woraus $T = Ea - GKg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg$

3) Wenn $h > c+d$ und $< c+d+e$ ist.

Man setze T statt t in die Gleichung $\mathcal{I}$, so wird

$$g = \frac{Ea - T}{HL - (q-r)H - r}$$

D' . woraus $T = Ea - HLg + (q-r)Hg + rg$

4) Wenn $h > c+d+e$ und $< c+d+e+f$ ist.

Man setze T statt t in die Gleichung X , so wird

$$g = \frac{Ea - T}{M - r}$$

E' . woraus $T = Ea - Mg + rg$

5) Wenn $h = 0$ ist.

Dieser und die beyden folgenden Fälle sind specielle Fälle der Formel B' , in welcher nach No. XV. der Werth von $I = (m+1) \cdot \frac{(m+1)^{c-h}}{m^{c-h}}$ ist. Setzt man hier-

ein $h = 0$, so wird $I = (m+1) \cdot \frac{(m+1)^c}{m^c}$.

Da nun nach No. X. $(m+1)^c : m^c = E:F$, also $F = \frac{m^c}{(m+1)^c} \cdot E$, so wird,

Wenn man diese hier gefundenen Werthe von F und I durcheinander multiplicirt,

$$FI = (m+1) \cdot \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{m^c}{(m+1)^c} \cdot E = (m+1) \cdot E.$$

Setzt man diesen Werth statt FI in die Formel B^r , so wird für diesen Fall

$$T = Ea - (m+1)Eg + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg$$

oder $T = [a - (m+1)g] \cdot E + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg.$ $F^r.$

6) Wenn $h=1$ ist, so wird

$$I = (m+1) \cdot \frac{(m+1)^{c-h}}{m^{c-h}} = (m+1) \cdot \frac{(m+1)^{c-1}}{m^{c-1}} = (m+1) \cdot \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(m+1)^{-1}}{m^{-1}} =$$

$$\frac{(m+1) \cdot (m+1)^c \cdot m}{m^c \cdot (m+1)} = \frac{m \cdot (m+1)^c}{m^c} \text{ und } F = \frac{m^c}{(m+1)^c} \cdot E,$$

daher $FI = m \cdot \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{m^c}{(m+1)^c} \cdot E$ oder $FI = mE.$

Dies in die Formel B^r gesetzt, giebt für diesen Fall

$$T = Ea - mEg + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg$$

oder $T = (a - mg) \cdot E + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg$ $G^r.$

Hiernach kann man in §. 26. des Herrn v. O. einen Druckfehler verbessern.

7) Wenn $h=c$ ist.

In der Formel C^r ist nach No. XV. der Werth von $K = \frac{(p+1) \cdot (p+1)^{c+d-h}}{p^{c+d-h}}$

setzt man hierin $h=c$, so wird

$$K = \frac{(p+1) \cdot (p+1)^{c+d-c}}{p^{c+d-c}} = \frac{(p+1)(p+1)^d}{p^d}$$

Da nun nach No. X. $(p+1)^d : p^d = F : G$

$$\text{so ist } GK = \frac{(p+1) \cdot (p+1)^d \cdot p^d}{p^d \cdot (p+1)^d} \cdot F = (p+1)F$$

Dies in die Formel C^r gesetzt, giebt für diesen Fall

$$T = Ea - (p+1)Fg + (p-q)Gg + (q-r)Hg + rg$$
 $H^r.$

8) Wenn $h=c+d$ ist.

In der Formel D' ist, nach No. XV. $L = \frac{(q+1) \cdot (q+1)^{c+d+e-h}}{q^{c+d+e-h}}$.

Hierinne setze man $h=c+d$, so wird

$$L = \frac{(q+1) \cdot (q+1)^{c+d+e-c-d}}{q^{c+d+e-c-d}} = \frac{(q+1) \cdot (q+1)^e}{q^e}$$

Nach No. X. ist nun $(q+1)^e : q^e = G : H$

$$\text{also } H = \frac{q^e}{(q+1)^e} \cdot G$$

$$\text{daher } HL = (q+1) \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot \frac{q^e}{(q+1)^e} \cdot G = (q+1) G.$$

diesen Werth setze man in die Formel D' , so wird für diesen Fall

$$T = Ea - (q+1)Gg + (q-1)Hg + rg$$

I. 9) Wenn $h=c+d+e$ ist.

In der Formel E' ist, nach No. XV. der Werth von $M = \frac{(r+1) \cdot (r+1)^{l-h}}{r^{l-h}}$. Setzt man hierein $h=c+d+e$, so wird der Exponent $l-h=l-(c+d+e)=c+d+e+f-(c+d+e)=f$, also

$$M = (r+1) \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f}$$

Ferner ist nach No. X. $r^f : (r+1)^f = 1 : H$, also $H = \frac{(r+1)^f}{r^f}$

$$\text{folglich } M = (r+1) \cdot H.$$

Setzt man diesen Werth in die Formel E' , so wird für diesen Fall

$$K. \quad T = Ea - (r+1)Hg + rg$$

10) Wenn $h=c+d+e+f=l$ ist.

In diesem Falle wird in der Gleichung E' der Werth von $M = \frac{(r+1) \cdot (r+1)^{l-h}}{r^{l-h}}$
 $= (r+1) \cdot \frac{(r+1)^0}{r^0} = r+1$. Folglich

$$T = Ea - (r+1)g + rg$$

$$\text{oder } T = Ea - rg - g + rg$$

oder $T = Ea - g =$ dem Waldbestande, der nach $1-h+1=1$ Holzschlag übrig verbleibt. Lässt man diesen Holzschlag weg, womit der Waldbestand sogleich nach Verfluss der $h=1$ Jahre angegriffen werden soll, so erwächst aus einem Waldbestande a nach $h=c+d+e+f=1$ jähriger Schonung ein Waldbestand

$$T = Ea$$

L'

Andere Auflösung.

Nach No. X. ist

$$(m+1)^c : m^c = 10000 : A = E : F \quad (1)$$

$$(p+1)^d : p^d = A : B = F : G \quad (2)$$

$$(q+1)^e : q^e = B : C = G : H \quad (3)$$

$$(r+1)^f : r^f = C : D = H : 1 \quad (4)$$

Aus der Proportion $C : D = H : 1$ (4) folgt

$$H = \frac{C}{D}$$

Ferner, wenn man die Proportionen:

$$C : D = H : 1 \quad (1)$$

$$B : C = G : H \quad (2)$$

in einander multiplicirt, so wird

$$CB : CD = GH : H$$

$$\text{oder } B : D = G : 1 \quad (5)$$

$$\text{woraus } G = \frac{B}{D}$$

Ferner folgt aus der Multiplication der Proportionen

$$B : D = G : 1 \quad (5)$$

$$\text{und } A : B = F : G \quad (2)$$

$$\text{dafs } A : D = F : 1 \quad (6)$$

$$\text{also } F = \frac{A}{D}$$

Wenn man endlich die Proportionen

$$A : D = F : 1 \quad (6)$$

$$\text{und } 10000 : A = E : F \quad (1)$$

durcheinander multiplicirt, so wird

$$10000 : D = E : 1$$

$$\text{woraus } E = \frac{10000}{D}$$

Setzt man nun die hier nach der Reihe gefundenen Werthe, nämlich $H = \frac{C}{D}$,

$G = \frac{B}{D}$, $F = \frac{A}{D}$ und $E = \frac{10000}{D}$ in die Formeln B^1 bis L^1 , so wird

1) wenn h sich nur bis in die Periode der c Jahre erstreckt

$$T = \frac{10000 \cdot a}{D} - \frac{AI}{D} \cdot g + (m-p) \cdot \frac{A}{D} \cdot g + (p-q) \cdot \frac{B}{D} \cdot g + (q-r) \cdot \frac{C}{D} \cdot g + rg$$

$$M^1. \text{ oder } T = [10000 \cdot a - AIg + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg] : D$$

2) wenn h sich bis in die Periode der d Jahre erstreckt:

$$T = \frac{10000}{D} \cdot a - \frac{B}{D} \cdot Kg + (p-q) \cdot \frac{B}{D} \cdot g + (q-r) \cdot \frac{C}{D} \cdot g + rg$$

$$N^1. \text{ oder } T = [10000 \cdot a - BKg + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg] : D$$

3) wenn sich h bis in die Periode der e Jahre erstreckt

$$T = \frac{10000 \cdot a}{D} - \frac{C}{D} \cdot Lg + (q-r) \cdot \frac{C}{D} \cdot g + rg$$

$$O^1. \text{ oder } T = [10000 \cdot a - CLg + (q-r)Cg + rDg] : D$$

4) wenn sich h bis in die Periode der f Jahre erstreckt

$$P^1. \quad T = \frac{10000 \cdot a}{D} - Mg + rg$$

5) wenn $h=0$ ist

$$T = [a - (m+1)g] \cdot \frac{10000}{D} + (m-p) \frac{A}{D} \cdot g + (p-q) \cdot \frac{B}{D} \cdot g + (q-r) \cdot \frac{C}{D} \cdot g + rg$$

$$Q^1. \text{ oder } T = [10000 \cdot (a - (m+1)g) + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg] : D$$

6) wenn $h=1$ ist

$$T = (a - mg) \cdot \frac{10000}{D} + (m - p) \frac{A}{D} \cdot g + (p - q) \cdot \frac{B}{D} \cdot g + (q - r) \frac{C}{D} \cdot g + rg$$

$$\text{oder } T = [10000 \cdot (a - mg) + (m - p) Ag + (p - q) Bg + (q - r) Cg + rDg] : D,$$

wornach die 3te Formel des 26sten §. in des Herrn v. Oppel Abhandlung abzuändern ist. R.

7) wenn $h=c$ ist:

$$T = \frac{10000 \cdot a}{D} - (p + 1) \cdot \frac{A}{D} \cdot g + (p - q) \cdot \frac{B}{D} \cdot g + (q - r) \frac{C}{D} \cdot g + rg$$

$$\text{oder } T = [10000 \cdot a - (p + 1) Ag + (p - q) Bg + (q - r) Cg + rDg] : D$$

S.

8) wenn $h=c+d$ ist:

$$T = \frac{10000 \cdot a}{D} - (q + 1) \cdot \frac{B}{D} \cdot g + (q - r) \cdot \frac{C}{D} \cdot g + rg$$

$$\text{oder } T = [10000 \cdot a - (q + 1) Bg + (q - r) Cg + rDg] : D$$

T.

9) wenn $h=c+d+e$ ist:

$$T = \frac{10000 \cdot a}{D} - (r + 1) \cdot \frac{C}{D} \cdot g + rg$$

$$\text{oder } T = [10000 \cdot a - (r + 1) Cg + rDg] : D$$

U.

10) wenn $h=c+d+e+f=1$ ist:

$T = 10000 \cdot a : D =$ dem Waldbestande, zu dessen Grösse der vorgegebene Waldbestand a nach 1 jähriger Schonung anwächst. V.

Anmerk. Wenn nach Verfluß der 1 Jahre kein merklicher Nachwuchs mehr zu erwarten ist, und T den verbleibenden Waldbestand nach $1+k$ Jahren ausdrücken soll, so muß man, weil sich die, durch die Formeln ^{B} bis ^{V} , ausgedruckter Waldbestände in den nach 1 folgenden k Jahren um den Betrag kg verändern, noch kg von allen diesen Formeln abziehen, wie dieß auch in der ersten und 2ten Formel des 25sten § der v. Oppelschen Abhandl. geschehen ist. Die in beyden Auflösungen gefundenen Formeln können einander gegenseitig zur Prüfung dienen.

No. XVII.

Ein bekanntgemachter Waldbestand eines Forstes von a Klaftern erhält in den ersten c Jahren nach dem Verhältnisse $m:1$, in den andern d Jahren nach dem Verhältnisse $p:1$, in den hierauf folgenden e Jahren nach dem Verhältnisse $q:1$, und in den letzten f Jahren nach dem Verhältnisse $r:1$ seinen jährlichen Zuwachs. Dieser Waldbestand a soll die ersten h Jahre hindurch gänzlich mit Holzschlägen verschont, und unmittelbar darauf, und nach Verfluß eines jeden Jahres, mit einem Holzschlage von g Klaftern angegriffen werden; man sucht

I. Den Waldbestand T , der nach v Jahren, welche sich in der Periode von c Jahren endigen, übrig bleibt, zu bestimmen, und zwar

- | | |
|--------------------------------|--------------|
| 1) wenn $h=0$ | $[^1Q, ^1F]$ |
| 2) wenn $h=1$ | $[^1R, ^1G]$ |
| 3) wenn $h < c$ und $< v$ ist. | $[^1M, ^1B]$ |

Auflösung.

Es sind schon bey jedem dieser drey Fälle diejenigen Formeln citirt worden, woraus man die zur Auflösung eines jeden Falles nöthigen Formeln herleiten, und nun durch folgendes Verfahren finden kann. Man setze nämlich v an die Stelle von c , und $d=e=f=0$, weil diese Werthe hier nicht in Betrachtung kommen, in obige citirte Formeln, oder vielmehr in die ihnen zugehörigen Logarithmen von A , B , C , u. s. f. so wird

$$\begin{aligned} \log. A &= \log. 10000 - v \cdot [\log. (m+1) - \log. m] \\ \log. B &= \log. A - 0 \cdot [\log. (p+1) - \log. p], \text{ oder } \log. B = \log. A \\ \log. C &= \log. B - 0 \cdot [\log. (q+1) - \log. q], \text{ oder } \log. C = \log. B \\ \log. D &= \log. C - 0 \cdot [\log. (r+1) - \log. r], \text{ oder } \log. D = \log. C \\ \text{also } \log. D &= \log. C = \log. B = \log. A, \text{ oder } D = C = B = A. \end{aligned}$$

Ferner wird

$$\begin{aligned} \log. H &= 0 \cdot [\log. (r+1) - \log. r], \text{ oder } \log. H = \log. 1 \\ \log. G &= \log. H + 0 \cdot [\log. (q+1) - \log. q], \text{ oder } \log. G = \log. H \\ \log. F &= \log. G + 0 \cdot [\log. (p+1) - \log. p], \text{ oder } \log. F = \log. G; \end{aligned}$$

also $\log. F = \log. G = \log. H = \log. 1$, daher $F = G = H = 1$;

Ferner $\log. E = v \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$;

Endlich $\log. I = \log. (m+1) + (v-h) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$;

Setzt man diesem zu Folge $A=B=C=D$ und $H=G=F=1$ in die oben citirten Formeln, so entsteht aus ^1Q

$$\begin{aligned} T &= [10000 \cdot (a - (m+1)g) + (m-p)Ag + (p-q)Ag + (q-r)Ag + rAg] : A \\ &= 10000 \cdot (a - (m+1)g) : A + (m-p)g + (p-q)g + (q-r)g + rg \\ &= 10000 \cdot (a - (m+1)g) : A + mg - pg + pg - qg + qg - rg + rg \\ &= 10000 \cdot (a - (m+1)g) : A + mg; \end{aligned}$$

ferner aus ^1F

$$\begin{aligned} T &= [a - (m+1)g] \cdot E + (m-p)g + (p-q)g + (q-r)g + rg \\ &= [a - (m+1)g] \cdot E + mg; \end{aligned}$$

ferner aus ^1G

$$\begin{aligned} T &= (a - mg) \cdot E + (m-p)g + (p-q)g + (q-r)g + rg \\ &= (a - mg) \cdot E + mg; \end{aligned}$$

ferner aus ^1M

$$\begin{aligned} T &= [10000 \cdot a - A Ig + (m-p)Ag + (p-q)Ag + (q-r)Ag + rAg] : A \\ &= 10000 \cdot a : A - Ig + mg; \end{aligned}$$

endlich aus ^1B

$$\begin{aligned} T &= Ea - Ig + (m-p)g + (p-q)g + (q-r)g + rg \\ &= Ea - Ig + mg \end{aligned}$$

Es wird also 1) für $h=0$ der gesuchte Waldbestand
entweder aus $T = 10000 \cdot [a - (m+1)g] : A + mg$

oder aus $T = [a - (m+1)g] \cdot E + mg$;

2) für $h=1$:

entweder aus $T = 10000 \cdot (a - mg) : A + mg$

oder aus $T = (a - mg) \cdot E + mg$;

3) für $h < c$ und $< v$

entweder aus $T = 10000 \cdot a : A - Ig + mg$

$^1W.$

$^1X.$

$^1T.$

$^1Z.$

$^2A.$

²B. oder aus $T = Ea - Ig + mg$ berechnet.

Anmerk. 1. In diesen hier gefundenen Formeln W , X u. s. f. bis B^2 werden die Werthe von A , E und I durch die Formeln:

$$\log. A = \log. 10000 - v \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = v \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m+1) + (v-h) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

bestimmt, wie aus dem Eingange dieser Auflösung erhellet.

Anmerk. 2. Zu den Formeln W und X , die den Waldbestand T bestimmen, welcher nach Verfluß von v Jahren, die sich in der Periode von c Jahren endigen, noch vorhanden ist, gelangt man auch durch die Formel A , nämlich durch

$$V = mg - (m+1)^{x-1} \cdot [(m+1)g - b] : m^{x-1}$$

in welcher V den Waldbestand bedeutet, der nach $x-1$ Jahren, und nach x wiederholten Holzschlägen von dem anfänglichen Waldbestande b übrig bleibt. Die Werthe von V , $x-1$, und b haben also mit den Werthen von T , v und a aus den Formeln W und X einerley Bedeutung, setzt man daher letztere den erstern gleich, so entsteht aus der Formel A die Formel

$$T = mg - (m+1)^v \cdot [(m+1)g - a] : m^v$$

$$= - \frac{(m+1)^v}{m^v} \cdot [(m+1)g - a] + mg$$

$$= \frac{(m+1)^v}{m^v} \cdot [a - (m+1)g] + mg.$$

Setzt man nun 1) $\frac{(m+1)^v}{m^v} = \frac{10000}{A}$, so wird

$$T = \frac{10000}{A} \cdot [a - (m+1)g] + mg$$

$$\text{oder } T = 10000 \cdot [a - (m+1)g] : A + mg.$$

Diese Formel ist nun nicht nur dem Aeufserlichen nach mit der Formel W einerley, sondern es wird auch in ihr der Werth von A

durch $\frac{(m+1)^v}{m^v} = \frac{10000}{A}$
 oder durch $A = 10000 : \frac{(m+1)^v}{m^v}$
 oder durch $\log. A = \log. 10000 - v \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$
 wie in der Formel ^1W bestimmt.

Setzt man 2) $\frac{(m+1)^v}{m^v} = E$, so wird

$$T = (a - (m+1)g) \cdot E + mg$$

welche Formel sowohl in Rücksicht der Form mit ^1X übereinstimmt, als auch dar-
 inne, daß in ihr der Werth von E durch

$$E = \frac{(m+1)^v}{m^v}$$

oder durch $\log. E = v \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$

wie in der Formel ^1X , bestimmt wird.

Anmerk. 3. Wenn man in voriger Anmerkung überall ^1T , wo ^1W ; ^1Z wo ^1X ;
 C wo A , mg wo $(m+1)g$, und x wo $x-1$ vorkommt, setzt, so sieht man,
 wie die Formeln ^1T und ^1Z auch durch die Formel C , nämlich durch

$$V = mg - \frac{(m+1)^x}{m^x} \cdot [mg - b]$$

hergeleitet werden können.

II. Man sucht den Waldbestand T , der nach $c+v$ Jahren, die sich in der
 Periode der d Jahre endigen, noch vorhanden ist, zu bestimmen, und zwar

- | | |
|-----------------------------|--------------|
| 1) wenn $h=0$ | $[^1Q, ^1F]$ |
| 2) wenn $h=1$ | $[^1R, ^1G]$ |
| 3) wenn $h < c$ | $[^1M, ^1B]$ |
| 4) wenn $h=c$ | $[^1S, ^1H]$ |
| 5) wenn $h > c$ und $< c+v$ | $[^1N, ^1C]$ |

Auflösung.

Es sind auch hier jedem Falle die Nahmen derjenigen Formeln hinzugefügt worden, woraus die zur Auflösung eines jeden Falls nöthigen Formeln herzuleiten sind. Man setze daher in diese citirte Formeln oder in die Logarithmen der in ihnen vorkommenden Werthe von A, B, C u. s. f. v statt d, und $e=f=0$, so bleibt

$$\log. A = \log. 10000 - c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

Hingegen wird

$$\log. B = \log. A - v. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. C = \log. B - o. [\log. (q+1) - \log. q] \text{ oder } \log. C = \log. B$$

$$\log. D = \log. C - o. [\log. (r+1) - \log. r] \text{ oder } \log. D = \log. C$$

$$\text{also } \log. D = \log. C = \log. B, \text{ daher } D = C = B;$$

$$\text{Ferner } \log. H = o. [\log. (r+1) - \log. r] = \log. 1$$

$$\log. G = \log. H + o. [\log. (q+1) - \log. q] = \log. H$$

$$\text{also } \log. G = \log. H = \log. 1, \text{ daher } G = H = 1;$$

$$\text{Ferner wird } \log. F = v. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\text{überdies bleibt } \log. E = \log. F + c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\text{und } \log. I = \log. (m+1) + (c-h). [\log. (m+1) - \log. m];$$

$$\text{Endlich wird } \log. K = \log. (p+1) + (c+v-h). [\log. (p+1) - \log. p];$$

Daher setze man nun in die oben citirten zehn Formeln $H = G = 1$, und $D = C = B$ so entsteht aus ¹Q:

$$T = [10000. (a - (m+1)g) + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Bg + rBg] : B$$

$$= [10000. (a - (m+1)g) + (m-p)Ag] : B + (p-q)g + (q-r)g + rg$$

$$= [10000. (a - (m+1)g) + (m-p)Ag] : B + pg - qg + qg - rg + rg$$

$$= [10000. (a - (m+1)g) + (m-p)Ag] : B + pg;$$

Ferner aus ¹F:

$$T = [a - (m+1)g]. E + (m-p)Fg + (p-q)g + (q-r)g + rg$$

$$= [a - (m+1)g]. E + (m-p). Fg + pg;$$

Ferner aus ¹R:

$$T = [10000. (a - mg) + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Bg + rBg] : B$$

$$= [10000. (a - mg) + (m-p)Ag] : B + pg;$$

Ferner aus ¹G:

$$T = (a - mg) \cdot E + (m - p) Fg + (p - q) g + (q - r) g + rg \\ = (a - mg) \cdot E + (m - p) Fg + pg;$$

Ferner aus ¹M:

$$T = [10000 \cdot a - A Ig + (m - p) Ag + (p - q) Bg + (q - r) Bg + rBg] : B \\ = [10000 \cdot a - A Ig + (m - p) Ag] : B + pg;$$

Ferner aus ¹B:

$$T = Ea - F Ig + (m - p) Fg + (p - q) g + (q - r) g + rg \\ = Ea - F Ig + (m - p) Fg + pg;$$

Ferner aus ¹S:

$$T = [10000 \cdot a - (p + 1) Ag + (p - q) Bg + (q - r) Bg + rBg] : B \\ = [10000 \cdot a - (p + 1) Ag] : B + pg;$$

Ferner aus ¹H:

$$T = Ea - (p + 1) Fg + (p - q) g + (q - r) g + rg \\ = Ea - (p + 1) Fg + pg;$$

Ferner aus ¹N:

$$T = [10000 \cdot a - Bkg + (p - q) Bg + (q - r) Bg + rBg] : B \\ = 10000 \cdot a : B - Kg + pg;$$

Endlich aus ¹C:

$$T = Ea - Kg + (p - q) g + (q - r) g + rg = Ea - Kg + pg.$$

Es wird also 1) für $h=0$ der gesuchte Waldbestand

entweder aus $T = [10000 \cdot (a - (m + 1)g) + (m - p) Ag] : B + pg$

oder aus $T = [a - (m + 1)g] \cdot E + (m - p) \cdot Fg + pg$

gefunden.

²C.

²D.

2) Für $h=1$ wird der gesuchte Waldbestand

durch $T = [10000(a - mg) + (m - p) Ag] : B + pg$

oder durch $T = (a - mg) \cdot E + (m - p) Fg + pg$

berechnet.

²E.

²F.

3) Für $h < c$ wird der gesuchte Waldbestand

²G. durch $T = [10000 \cdot a - A Ig + (m - p) Ag] : B + pg$

H. oder $T = Ea - F Ig + (m - p) Fg + pg$

bestimmt.

4) Für $h = c$ wird der gesuchte Waldbestand

²L. durch $T = [10000 \cdot a - (p + 1) \cdot Ag] : B + pg$

²K. oder $T = Ea - (p + 1) Fg + pg$

bestimmt.

5) Für $h > c$ und $< c + v$ wird der gesuchte Waldbestand

²L. durch $T = 10000 \cdot a : B - Kg + pg$

M. oder $T = Ea - Kg + pg$

berechnet.

Anmerk. In diesen Formeln ²C, ²D u. s. f. bis ²M werden die Werthe von A,

B, E, F, I und K durch die Formeln

$$\log. A = \log. 10000 - c \cdot [\log. (m + 1) - \log. m]$$

$$\log. B = \log. A - v \cdot [\log. (p + 1) - \log. p]$$

$$\log. F = v \cdot [\log. (p + 1) - \log. p]$$

$$\log. E = \log. F + c \cdot [\log. (m + 1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m + 1) + (c - h) \cdot [\log. (m + 1) - \log. m]$$

$$\log. K = \log. (p + 1) + (c + v - h) \cdot [\log. (p + 1) - \log. p],$$

wie aus dem Eingange dieser Auflösung klar ist, bestimmt.

III. Man sucht den Waldbestand T, der nach Verfluß von $c + d + v$ Jahren, die in der Periode von e Jahren ihr Ende erreichen, noch übrig verbleibt, zu bestimmen, und zwar

1) wenn $h = 0$

[¹Q, ¹F]

2) wenn $h = 1$

[¹R, ¹G]

3) wenn $h < c$

[¹M, ¹B]

4) wenn $h = c$

[¹S, ¹H]

5) wenn $h > c$ und $< c + d$

[¹N, ¹C]

$$6) \text{ wenn } h = c + d \quad [{}^1T, {}^1I]$$

$$7) \text{ wenn } h > c + d \text{ und } < c + d + v \quad [{}^1O, {}^1D]$$

Auflösung.

Die Auflösungen eines jeden dieser sieben Fälle sind aus den neben ihnen citirten Formeln auf folgende Art herzuleiten.

Man setze nämlich in die Logarithmen der Werthe A, B, C u. s. f. die den Formeln ${}^1Q$, ${}^1F$ u. s. f. bis ${}^1O$, ${}^1T$ zugehören v statt e und $f = 0$, so bleibt

$$\log. A = \log. 10000 - c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. B = \log. A - d. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\text{hingegen wird } \log. C = \log. B - v. [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\log. D = \log. C - 0. [\log. (r+1) - \log. r] = \log. C$$

$$\text{also } D = C$$

$$\text{Ferner wird } \log. H = 0. [\log. (r+1) - \log. r] = 0, \text{ also } H = 1$$

$$\log. G = \log. H + v. [\log. (q+1) - \log. q] = v. [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\text{Ueberdies bleibt } \log. F = \log. G + d. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. E = \log. F + c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m+1) + (c-h). [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. K = \log. (p+1) + (c+d-h). [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\text{Endlich wird } \log. L = \log. (q+1) + (c+d+v-h). [\log. (q+1) - \log. q]$$

Diesem zu Folge setze man in die oben citirten vierzehn Formeln $D = C$ und $H = 1$, so entsteht aus ${}^1Q$:

$$T = [10000. (a - (m+1)g) + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rCg] : C$$

$$= [10000. (a - (m+1)g) + (m-p)Ag + (p-q)Bg] : C + qg;$$

Ferner aus ${}^1F$:

$$T = [a - (m+1)g]. E + (m-p)Fg + (p-q)Gg + (q-r)g + rg$$

$$= [a - (m+1)g]. E + (m-p)Fg + (p-q)Gg + qg$$

Ferner aus ${}^1R$:

$$T = [10000. (a - mg) + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rCg] : C$$

$$= [10000. (a - mg) + (m-p)Ag + (p-q)Bg] : C + qg;$$

Ferner aus ^1G :

$$\begin{aligned} T &= (a - mg) \cdot E + (m - p) Fg + (p - q) Gg + (q - r) g + rg \\ &= (a - mg) \cdot E + (m - p) Fg + (p - q) Gg + qg; \end{aligned}$$

Ferner aus ^1M :

$$\begin{aligned} T &= [10000, a - A Ig + (m - p) Ag + (p - q) Bg + (q - r) Cg + r Cg] : C \\ &= [10000, a - A Ig + (m - p) Ag + (p - q) Bg] : C + qg; \end{aligned}$$

Ferner aus ^1B :

$$\begin{aligned} T &= Ea - F Ig + (m - p) Fg + (p - q) Gg + (q - r) g + rg \\ &= Ea - F Ig + (m - p) Fg + (p - q) Gg + qg \end{aligned}$$

Ferner aus ^1S :

$$\begin{aligned} T &= [10000, a - (p + 1) Ag + (p - q) Bg + (q - r) Cg + r Cg] : C \\ &= [10000, a - (p + 1) Ag + (p - q) Bg] : C + qg; \end{aligned}$$

Ferner aus ^1H :

$$\begin{aligned} T &= Ea - (p + 1) Fg + (p - q) Gg + (q - r) g + rg \\ &= Ea - (p + 1) Fg + (p - q) Gg + qg \end{aligned}$$

Ferner aus ^1N :

$$\begin{aligned} T &= [10000, a - BKg + (p - q) Bg + (q - r) Cg + r Cg] : C \\ &= [10000, a - BKg + (p - q) Bg] : C + qg; \end{aligned}$$

Ferner aus ^1C :

$$\begin{aligned} T &= Ea - GKg + (p - q) Gg + (q + r) g + rg \\ &= Ea - GKg - (p - q) Gg + qg; \end{aligned}$$

Ferner aus ^1T :

$$\begin{aligned} T &= [10000, a - (q + 1) Bg + (q - r) Cg + r Cg] : C \\ &= [10000, a - (q + 1) Bg] : C + qg; \end{aligned}$$

Ferner aus ^1I :

$$\begin{aligned} T &= Ea - (q + 1) Gg + (q - r) g + rg \\ &= Ea - (q + 1) Gg + qg \end{aligned}$$

Ferner aus ^1O :

$$\begin{aligned} T &= [10000, a - CLg + (q - r) Cg + r Cg] : C \\ &= 10000, a : C - Lg + qg; \end{aligned}$$

Endlich aus ¹D:

$$\begin{aligned} T &= Ea - Lg + (q - r)g + rg \\ &= Ea - Lg + qg. \end{aligned}$$

Es wird demnach der gesuchte Waldbestand

1) für $h=0$:

$$\begin{aligned} T &= [10000 \cdot a - (m+1)g + (m-p)Ag + (p-q)Bg] : C + qg & ^2N. \\ \text{oder } T &= (a - (m+1)g)E + (m-p)Fg + (p-q)Gg + qg & ^2O. \end{aligned}$$

2) für $h=1$:

$$\begin{aligned} T &= [10000 \cdot (a - mg) + (m-p)Ag + (p-q)Bg] : C + qg & ^2P. \\ \text{oder } T &= (a - mg)E + (m-p)Fg + (p-q)Gg + qg & ^2Q. \end{aligned}$$

3) für $h < c$

$$\begin{aligned} T &= [10000 \cdot a - A Ig + (m-p)Ag + (p-q)Bg] : C + qg & ^2R. \\ \text{oder } T &= Ea - F Ig + (m-p)Fg + (p-q)Gg + qg & ^2S. \end{aligned}$$

4) für $h=c$:

$$\begin{aligned} T &= [10000 \cdot a - (p+1)Ag + (p-q)Bg] : C + qg & ^2T. \\ \text{oder } T &= Ea - (p+1)Fg + (p-q)Gg + qg & ^2U. \end{aligned}$$

5) für $h > c$ und $< c+d$:

$$\begin{aligned} T &= 10000 [a - BKg + (p-q)Bg] : C + qg & ^2V. \\ \text{oder } T &= Ea - GKg + (p-q)Gg + qg & ^2W. \end{aligned}$$

6. für $h=c+d$:

$$\begin{aligned} T &= [10000 \cdot a - (q+1)Bg] : C + qg & ^2X. \\ \text{oder } T &= Ea - (q+1)Gg + qg & ^2Y. \end{aligned}$$

7) für $h > c+d$ und $< c+d+v$:

$$\begin{aligned} T &= 10000 \cdot a : C - Lg + qg & ^2Z. \\ \text{oder } T &= Ea - Lg + qg. & ^3A. \end{aligned}$$

Anm. In diesen Formeln ²N ²O u. s. f. bis ³A werden die Werthe der Buchstaben A, B, C u. s. f. durch die Formeln:

$$\log. A = \log. 10000 - c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. B = \log. A - d. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. C = \log. B - v. [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\log. G = v. [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\log. F = \log. G + d. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. E = \log. F + c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m+1) + (c-h). [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. K = \log. (p+1) + (c+d-h). [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. L = \log. (q+1) + (c+d+v-h). [\log. (q+1) - \log. q]$$

bestimmt.

IV. Den Waldbestand T, der nach $c+d+e+v$ Jahren, die sich innerhalb der Periode der f Jahre endigen, noch vorhanden ist, zu bestimmen, und zwar:

- | | |
|-------------------------------------|----------|
| 1) wenn $h = 0$ | $[A, F]$ |
| 2) wenn $h = 1$ | $[R, G]$ |
| 3) wenn $h < c$ | $[M, B]$ |
| 4) wenn $h = c$ | $[S, H]$ |
| 5) wenn $h > c$ und $< c+d$ | $[N, C]$ |
| 6) wenn $h = c+d$ | $[T, I]$ |
| 7) wenn $h > c+d$ und $< c+d+e$ | $[O, D]$ |
| 8) wenn $h = c+d+e$ | $[U, K]$ |
| 9) wenn $h > c+d+e$ und $< c+d+e+v$ | $[P, E]$ |

Auflösung.

Man setze in die Logarithmen der Werthe A, B, C u. s. f. die den hier citirten Formeln zugehören, v statt f , und bestimme die Werthe A, B, C u. s. f. aus

$$\log. A = \log. 10000 - c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. B = \log. A - d. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. C = \log. B - e. [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\log. D = \log. C - v. [\log. (r+1) - \log. r]$$

$$\log. H = v. [\log. (r+1) - \log. r]$$

$$\begin{aligned}\log. G &= \log. H + c \cdot [\log. (q+1) - \log. q] \\ \log. F &= \log. G + d \cdot [\log. (p+1) - \log. p] \\ \log. E &= \log. F + c \cdot [\log. (m+1) - \log. m] \\ \log. I &= \log. (m+1) + (c-h) \cdot [\log. (m+1) - \log. m] \\ \log. K &= \log. (p+1) + (c+d-h) \cdot [\log. (p+1) - \log. p] \\ \log. L &= \log. (q+1) - (c+d+e-h) \cdot [\log. (q+1) - \log. q] \\ \log. M &= \log. (r+1) - (c+d+e+v-h) \cdot [\log. (r+1) - \log. r]\end{aligned}$$

Hierauf berechne man den gesuchten Waldbestand T für jeden der obigen neun Fälle unmittelbar aus den darneben citirten Formeln.

V. Wenn man in die Formel $T = Ea$ (L) nach und nach v statt c , d , e und f , und dann die nach v folgenden Perioden $= 0$ setzt, so ergeben sich aus ihr die Waldbestände, die aus dem anfänglichen Waldbestande a bey dessen gänzlicher Schonung, nach Verfluß von v , $c+v$, $c+d+v$, und $c+d+e+v$ Jahren erwachsen. Man findet nämlich aus der Formel $T = Ea$

1. Den nach v jähriger Schonung vorhandenen Waldbestand T , wenn man den Werth von E durch den Logarithmen von E in I bestimmt;

2) Den nach $c+v$ jähriger Schonung vorhandenen Waldbestand T , wenn man E durch die Logarithmen von F und E in II bestimmt;

3) Den nach $c+d+v$ jähriger Schonung vorhandenen Waldbestand T , wenn man E durch die Logarithmen von G , F und E in III bestimmt; und

4) Den nach $c+d+e+v$ jähriger Schonung vorhandenen Waldbestand T , wenn man den Werth von E durch die Logarithmen von H , G , F und E in IV bestimmt.

Die Jahre v dürfen jedoch die Periode nicht überschreiten, in welcher sie ihren Anfang nehmen.

No. XVIII.

Es wird eine Anzahl Jahre h und eine grössere Anzahl Jahre l vorgegeben, [§. 28.] welche beyde von dem Zeitpunkte zu zählen angefangen werden, in dem ein be-

kannt gemachter Waldbestand eines Forstes $= a$ ist, der in dem Laufe der h Jahre gänzlich geschont; in den darauf folgenden $l-h$ Jahren aber mit einem Holzschlage jährlich angegriffen, und nach $l-h+1$ dergleichen Holzschlägen, von gleichem Ertrage, und demnach mit Ablauf der l Jahre bis auf einen ebenfalls gegebenen Holzbetrag T abgeholzt werden soll. Es wird zugleich bekannt gemacht, daß der Waldbestand a in den ersten c Jahren, wie $m:1$, in den darauf folgenden d Jahren, wie $p:1$, in den nun folgenden e Jahren, wie $q:1$, und endlich in den letzten f Jahren, wie $r:1$ sein jährliches Wachsthum erhält; Man soll den Betrag g des nach h Jahren bis zum Ablaufe der l Jahre jährlich erfolgenden Holzschlags durch Rechnung bestimmen, und zwar:

I. wenn $l=v$ und $< c$ oder höchstens $= c$ ist.

Auflösung.

1) Wenn $h=0$, so findet man aus den Formeln ^1R und ^1W :

$$^3B. \quad g = \frac{Ea - T}{(m+1) \cdot E - m}$$

$$^3C. \quad g = \frac{10000 \cdot a - TA}{10000 \cdot (m+1) - mA}$$

2) Wenn $h=1$, so findet man aus den Formeln ^1Z u ^1S

$$^3D. \quad g = \frac{Ea - T}{m \cdot (E - 1)}$$

$$^3E. \quad g = \frac{10000 \cdot a - TA}{m \cdot (10000 - A)}$$

3) Wenn $h < c$, so findet man aus den Formeln ^2B und ^2A

$$^3F. \quad g = \frac{Ea - T}{1 - m}$$

$$^3G. \quad g = \frac{10000 \cdot a - TA}{A \cdot (1 - m)}$$

In diesen sechs Formeln ^3B , ^3C , u. s. f. bis ^3G , werden die Werthe von A , E und I , wie in voriger Aufgabe nach I, bestimmt.

II. Wenn $l=c+v$ und $v < d$ und höchstens $= d$ ist.

Auflösung.

1) Wenn $h=0$ ist, so findet man aus den Formeln ${}^2D$ und ${}^2C$

$$g = \frac{Ea - T}{(m+1)E - (m-p)F - p} \quad {}^3H.$$

$$g = \frac{10000 \cdot a - T \cdot B}{10000 \cdot (m+1) - (m-p)A - pB} \quad {}^3I.$$

2) Wenn $h=1$ ist, so findet man aus den Formeln ${}^2F$ und ${}^2E$

$$g = \frac{Ea - T}{mE - (m-p)F - p} \quad {}^3K.$$

$$g = \frac{10000 \cdot a - TB}{10000 \cdot m - (m-p)Ag - pB} \quad {}^3L.$$

3) Wenn $h < c$ ist, so findet man aus den Formeln ${}^2H$ und ${}^2G$

$$g = \frac{Ea - T}{FI - (m-p)F - p} \quad {}^3M.$$

$$g = \frac{10000 \cdot a - TB}{AI - (m-p)A - pB} \quad {}^3N.$$

4) Wenn $h=c$, so suche man den Werth von g aus den Formeln ${}^2K$ und ${}^2I$:

$$g = \frac{Ea - T}{(p+1)F - p} \quad {}^3O.$$

$$g = \frac{10000 \cdot a - TB}{(p+1)A - pB} \quad {}^3P.$$

5) Wenn $h=c$, so findet man aus den Formeln ${}^2M$ und ${}^2L$

$$g = \frac{Ea - T}{K - p} \quad {}^3Q.$$

$$g = \frac{10000 \cdot a - TB}{B(K - p)} \quad {}^3R.$$

In diesen zehn Formeln ${}^3H$, ${}^3I$ u. s. f. ${}^3R$ werden die Werthe von A, B, E, F und K, wie in voriger Aufgabe in II, bestimmt.

III. Wenn $l = c + d + v$ und $v < e$, oder höchstens $= e$ ist.

Auflösung.

1. Für $h = 0$ findet man aus den Formeln ${}^2O$ und ${}^2N$:

$${}^3S. \quad g = \frac{Ea - T}{(m+1)E - (m-p)Fg - (p-q)g - q}$$

$${}^3T. \quad g = \frac{10000 \cdot a - T \cdot C}{10000 \cdot (m+1) - (m-p)A - (p-q)B - qC}$$

2) Für $h = 1$ folgt aus den Formeln ${}^2Q$ und ${}^2P$

$${}^3U. \quad g = \frac{Ea - T}{mE - (m-p)F - (p-q)G - q}$$

$${}^3V. \quad g = \frac{10000 \cdot a - T \cdot C}{10000 \cdot m - (m-p)A - (p-q)B - qC}$$

3) Für $h < c$ findet man aus den Formeln ${}^2S$ und ${}^2R$

$${}^3W. \quad g = \frac{Ea - T}{FI - (m-p)F - (p-q)G - q}$$

$${}^3X. \quad g = \frac{10000 \cdot a - TC}{AI - (m-p)A - (p-q)B - p}$$

4) Wenn $h = c$, so suche man g aus den Formeln ${}^2U$, ${}^2T$, nämlich:

$${}^3Y. \quad g = \frac{Ea - T}{(p+1)F - (p-q)G - q}$$

$${}^3Z. \quad g = \frac{10000 \cdot a - TC}{AI - (m-p)A - (p-q)B - qC}$$

5) Wenn $h > c$ und $< c + d$, so entwicke man den Werth von g aus den Formeln ${}^2U$, ${}^2V$, nämlich:

$${}^4A. \quad g = \frac{Ea - T}{GK - (p-q)G - q}$$

$$g = \frac{10000 \cdot a - TC}{BK - (p-q)B - q}$$

⁴B.

6) Für $h = c + d$ findet man aus den Formeln ²T, ²X:

$$g = \frac{Ea - T}{(q+1)G - q}$$

⁴C.

$$g = \frac{10000 \cdot a - TC}{(q+1)B - qC}$$

⁴D.

7) Für $h > c + d$ und $< c + d + e$ findet man aus den Formeln ³A, ²Z:

$$g = \frac{Ea - T}{L - q}$$

⁴E.

$$g = \frac{10000 \cdot a - CT}{C \cdot (L - q)}$$

⁴F.

In den Formeln ³S, ³T u. s. f. bis ⁴F werden die Werthe der Buchstaben A, B, C, G, F, E, I, K und L, wie in voriger Aufgabe in III, bestimmt.

IV. Wenn $l = c + d + e + v$, $v < f$ oder höchstens $= f$

Auflösung.

1) Für $h = 0$ findet man aus den Formeln ¹F und ¹Q:

$$g = \frac{Ea - T}{(m+1)E - (m-p)F - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

⁴G.

$$g = \frac{10000 \cdot a - T \cdot D}{10000 \cdot (m+1) - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)C - rD}$$

⁴H.

2) Für $h = 1$ findet man aus den Formeln ¹G und ¹R

$$g = \frac{Ea - T}{mE - (m-p)F - (p-q)G - (q-r)C - H - r}$$

⁴I.

$$g = \frac{10000 \cdot a - TD}{10000 \cdot m - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)C - rD}$$

⁴K.

3) Für $h < c$ folgt aus ¹A und ¹M

$$g = \frac{Ea - T}{IF - (m-p)F - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

⁴L.

K

^{M.}

$$g = \frac{10000 \cdot a - TD}{AI - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)D - rD}$$

4) Für $h=c$ entsteht aus ^H und ^S:^{N.}

$$g = \frac{Ea - T}{(p+1)F - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

^{O.}

$$g = \frac{10000 \cdot a - TD}{(p+1)A - (p-q)B - (q-r)C - rD}$$

5) Für $h > c$ und $< c+d$ folgt aus ^Z und ^N:^{P.}

$$g = \frac{Ea - T}{KG - (p-q)G - (q-r)H - r}$$

^{Q.}

$$g = \frac{10000 \cdot a - TD}{BK - (p-q)B - (q-r)C - rD}$$

6) Für $h=c+d$ ergibt sich aus ^I und ^T:^{R.}

$$g = \frac{Ea - T}{(q+1)G - (q-r)H - r}$$

^{S.}

$$g = \frac{10000 \cdot a - TD}{(q+1)B - (q-r)C - rD}$$

7) Für $h > c+d$ und $< c+d+e$ findet man aus ^T und ^O:^{T.}

$$g = \frac{Ea - T}{HL - (q-r)H - r}$$

^{U.}

$$g = \frac{10000 \cdot a - TD}{CL - (q-r)C - rD}$$

8) Für $h=c+d+e$ findet man aus ^K und ^U:^{V.}

$$g = \frac{Ea - T}{(r+1)H - r}$$

^{W.}

$$g = \frac{10000 \cdot a - TD}{(r+1)C - rD}$$

9) Für $h > c+d+e$ und $< c+d+e+f$ folgt aus ^X und ^P:^{X.}

$$g = \frac{Ea - T}{M - r}$$

$$g = \frac{10000 \cdot a - TD}{D \cdot (M-r)}$$

^{4T.}

In diesen hier auf einander folgenden Formeln ^{4G}, ^{4H} u. s. f. ^{4T} werden die Werthe von A, B, C u. s. f., wie in voriger Aufgabe in IV, bestimmt.

No. XIX.

Es ist ein Waldbestand von a Klaftern gegeben, welcher in den vier auf einander folgenden Perioden von c, d, e und f Jahren, nämlich in der ersten Periode von c Jahren in dem Verhältnisse, wie m:1, in der 2ten Periode von d Jahren, wie p:1, in der 3ten Periode von e Jahren, wie q:1, und in der letzten Periode von f Jahren, wie r:1, seinen jährlichen Zuwachs erhält. Man soll die Anzahl z der Jahre finden, in deren Dauer der Waldbestand a gänzlich geschont werden muß, damit dieser von dem Ablaufe der z Jahre an, bis zum gänzlichen Ablaufe von l Jahren einen jährlichen Holzschlag von g Klaftern also ertragen kann, daß nach Vollbringung dieser l-z+1 Holzschläge ein noch ungefallter Waldbestand von T Klaftern übrig bleibt; und zwar:

I. Wenn l = v, v < c und höchstens = c ist.

Auflösung.

Da hier die Jahre d, e, f nicht in Betrachtung kommen, so setze man d=e=f=0, so wird (nach No. XVII. in I) H=G=F=1. Diesen Werth setze man nun in die Formeln X und W, so wird

$$z = \frac{\log. g + \log. (m+1) + \log. E - \log. [Ea + (m-p)g + (p-q)g + (q-r)g + rg - T]}{\log. (m+1) - \log. m}$$

$$\text{oder } z = \frac{\log. g + \log. (m+1) + \log. E - \log. [Ea + mg - T]}{\log. (m+1) - \log. m}$$

^{4Z.}

Ferner wird aus V:

$$Ea - (m+1)Eg + mg - T = x$$

^{4A.}

In diesen beyden Formeln ^{4Z} und ^{4A} wird der Werth von E durch

$$\log. E = v \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

bestimmt. Nun bediene man sich der Formeln ${}^4Z$ und ${}^5A$ zur Auflösung dieses Falles folgendergestalt: Man berechne erst aus der Formel ${}^5A$ den Werth von x . Wird x positiv, so ist die Auflösung unmöglich; wird $x=0$, so ist auch $z=0$; wird aber x negativ, so berechne man den Werth von z aus der Formel ${}^4Z$. Fände man hieraus $z < v$, so wäre g zu groß angenommen, und der Waldbestand a würde bey gänzlicher Verschonung mit Holzschlägen in v Jahren noch nicht die Größe T erreichen.

II. Wenn $l=c+v$, $v < d$ und höchstens $=d$ ist.

Auflösung.

Hier kommen die Jahre e und f nicht in Betrachtung und können daher $=0$ gesetzt werden, wodurch (nach No. XVII in II.) $H=G=1$ wird. Diesen Werth von H und G setze man nun in die Formeln U , V und W , so wird aus U :

$$z-c = \frac{\log. g + \log. (p+1) + \log. F - \log. [Ea + (p-q)g + (q-r)g + rg - T]}{\log. (p+1) - \log. p}$$

${}^5B.$ oder $z-c = \frac{\log. g + \log. (p+1) + \log. F - \log. [Ea + pg - T]}{\log. (p+1) - \log. p}$

Ferner wird aus der Formel V :

${}^5C.$ $z = \frac{\log. g + \log. (m+1) + \log. E - \log. [Ea + (m-p)Fg + pg - T]}{\log. (m+1) - \log. m}$

Ferner aus W :

$$Ea - (m+1)Eg + (m-p)Fg + pg - T = x$$

In diesen drey Formeln: ${}^5B$, ${}^5C$ und ${}^5D$ sind die Werthe von F und E , wie in No. XVII in II, durch die Formeln

$$\log. F = v \cdot [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. E = \log. F + c \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

zu bestimmen.

Nun bediene man sich zur Auflösung dieses Falls der hier gefundenen Formeln ${}^5B$, ${}^5C$ und ${}^5D$ und berechne vorerst aus der Formel D den Werth von x . Findet man diesen bejahend, so passen die Data in der Aufgabe nicht zusammen; Findet man $x=0$, so wird der Waldbestand a nicht erst geschont, sondern sogleich

mit einem Holzschlage angegriffen; Findet man endlich x verneinend, so ist dies ein Zeichen von der Möglichkeit der Auflösung. In diesem Falle bestimme man aus Formel ^5B den Werth von $z-c$. Fände man nun $z-c$ bejahend, jedoch $< v$ z. B. $z-c=v'$, so wird $z=c+v'$; Fände man hingegen $z-c$ verneinend, so endigen sich die Jahre der Schonung in der ersten Periode, und müssen durch die Formel ^5B bestimmt werden.

III. Wenn $l=c+d+v$, $v < e$ und höchstens $= e$ ist.

Auflösung.

Hier kommt die Periode von f Jahren nicht in Betrachtung, daher kann man $f=0$ setzen, wodurch, nach No. XVII in III, $H=1$ wird. Setzt man diesen Werth in die Formeln T , U , V und W , so wird aus der Formel T :

$$z-c-d = \frac{\log. g + \log. (q+1) + \log. G - \log. [Ea + (q-r)g + rg - T]}{\log. (q+1) - \log. q}$$

$$\text{oder } z-c-d = \frac{\log. g + \log. (q+1) + \log. G - \log. [Ea + qg - T]}{\log. (q+1) - \log. q} \quad ^5E.$$

Ferner wird aus der Formel U :

$$z-c = \frac{\log. g + \log. (p+1) + \log. F - \log. [Ea + (p-q)Gg + qg - T]}{\log. (p+1) - \log. p} \quad ^5F.$$

Ferner aus der Formel V :

$$z = \frac{\log. + \log. (m+1) + \log. E - \log. [Ea + (m-p)Fg + (p-q)Gg + qg - T]}{\log. (m+1) - \log. m} \quad ^5G$$

Endlich wird aus der Formel W :

$$Ea - (m+1)Eg + (m-p)Fg + (p-q)Gg + qg - T = x \quad ^5H.$$

In diesen Formeln ^5E , ^5F u. s. f. ^5H werden die Werthe von E , F und G , wie in No. XVII in III, durch

$$\log. G = v \cdot [\log. (q+1) - \log. q]$$

$$\log. F = \log. G + d \cdot [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. E = \log. F + c \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

bestimmt.

Erhält man nun aus der Formel $'H$ für x einen positiven Werth, so ist die Auflösung unmöglich; wird $x=0$, so ist auch $z=0$; wird x negativ, so suche man aus der Formel $'E$ den Werth von $z-c-d$. Wird dieser Werth gröfser, wie v , so wird $z > c+d+v$ und g ist zu groß angenommen worden, wird aber der Werth von $z-c-d < v$, jedoch noch bejahend, z. B. $z-c-d=v'$ gefunden, so wird $z=c+d+v'$. Findet man endlich den Werth von $z-c-d$ negativ, so muß man der Formel $'F$ den Werth von $z-c$ bestimmen. Dieser ist nun entweder positiv, z. B. $z-c=d'$, oder negativ. Im ersten Falle wird $z=c+d'$, im andern berechne man aus der Formel $'G$ den gesuchten Werth von z .

IV. Wenn $l=c+d+e+v$, $v < f$ oder höchstens $= f$ ist.

Auflösung.

Man berechne z nach No. XIV in VI und setze daselbst überall v statt f , im Fall $v < f$ ist.

No. XX.

[§.28.] Ein vorgegebener Waldbestand eines Forstes von a Klaftern erhält nach den Angaben der Forstverständigen in den auf einander folgenden Perioden von c, d, e und f Jahren nach den Verhältnissen $m:1, p:1, q:1$, und $r:1$ seinen jährlichen Zuwachs, und hört nach Ablauf von $c+d+e+f$ Jahren auf, merklich zu wachsen. Dieser Waldbestand a soll die ersten h Jahre hindurch gänzlich mit Holzschlägen verschont, und unmittelbar darauf, und nach Verfluß eines jeden Jahres, mit einem Holzschlage von g Klaftern angegriffen werden. Man soll untersuchen, auf wie viel Jahre (y) der gegebene Waldbestand a mit seinem künftigen Zuwachse ausreichen werde.

Auflösung.

Diese Aufgabe zerfällt, wie die drey vorigen, in mehrere andere, je nachdem sich die Jahre der Schonung bis in die 1te, 2te, 3te oder 4te Periode erstrecken. Es sey daher

I. $h=0$

Nach der zu No. XVI. angefügten Anmerkung findet man aus der Formel 'Q':

$$T = (10000 \cdot [a - (m+1)g] + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg) : D - kg$$

den Waldbestand, welcher bey gar keiner Schonung nach $c+d+e+f+k$ Jahren übrig verbleibt. Setzt man in dieser Formel $T=0$, so wird

$$0 = [10000a - 10000(m+1)g + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg] : D - kg$$

Diese Gleichung enthält nun die Bedingungen obiger Aufgabe alle in sich. Daher entwickle man hieraus

$$k = [10000 \cdot a : g - 10000(m+1) + (m-p)A + (p-q)B + (q-r)C + rD] : D \quad 51.$$

Hieraus berechne man den Werth von k . Findet man k positiv, so wird $y=c+d+e+f+k$; findet man $k=0$, so wird $y=c+d+e+f$; findet man endlich k negativ, so wird $y < c+d+e+f$

Bey Eintretung des letzten Falles untersuche man, ob sich die Jahre des Holzschlags in einem der f Jahre endigen werden, und setze

$$y = c + d + e + f'$$

worinne f' einen noch unbekannten Theil von f bedeutet. Da nun für einen negativen Werth für k , $c+d+ef'$ aus $c+d+e+f+k$ wird, so setze man $k=0$ in die Formel 'I' und f' statt f in den darinne vorkommenden Werth von D , nämlich in $\log. D = \log. C - f \cdot [\log. (r+1) - \log. r]$ (No. X.) weil hierdurch D bestimmt wird.

Der ersten Forderung zu Folge wird

$$0 = [10000a : g - 10000(m+1) + (m-p)A + (p-q)B + (q-r)C + rD] : D$$

$$\text{oder } 0 = 10000 \cdot a : g - 10000 \cdot (m+1) + (m-p)A + (p-q)B + (q-r)C + rD$$

$$\text{und } 10000(m+1) - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)C - 10000 \cdot a : g = rD$$

Wenn man hiervon die Logarithmen nimmt, so wird

$$\log. [10000 \cdot (m+1) - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)C - 10000 \cdot a : g] = \log. r + \log. D$$

Nach der zweyten Forderung wird

$$\log. D = \log. C - f' \cdot [\log. (r+1) - \log. r]$$

Diesen Werth substituire man in letztere Gleichung, so wird

$$\log. [10000(m+1) - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)C - 10000 \cdot a : g] = \log. r + \log. C - f' [\log. (r+1) - \log. r]$$

folglich

$$f'[\log.(r+1)-\log.r]=\log.r+\log.C-\log.[10000(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-(q-r)C-10000.a:g]$$

daher

$${}^K f' = \frac{\log.r+\log.C-\log.[10000.(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-(q-r)C-10000.a:g]}{\log.(r+1)-\log.r}$$

Findet man nun aus dieser Formel f' positiv, so wird $y=c+d+e+f'$, findet man $f'=0$, so wird $y=c+d+e$, findet man endlich f' negativ, so wird $y<c+d+e$.

In diesem letzten Falle setze man $y=c+d+e'$ worinne e' einen noch unbekannten Theil von e bedeutet. Es wird also für einen negativen Werth für f' , $c+d+e'$ aus $c+d+e+f'$. Daher setze man $f'=0$ in der Formel ^{K} ; in die hierdurch veränderte Formel setze man alsdann $\log.C=\log.B-e'[\log.(q+1)-\log.q]$, also e' statt e .

Die erste Forderung macht die Formel ^{K} zu

$$0 = \frac{\log.r+\log.C-\log.[10000(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-(q-r)C-10000.a:g]}{\log.(r+1)-\log.r}$$

$$\text{oder } 0 = \log.r+\log.C-\log.[10000(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-(q-r)C-10000.a:g]$$

$$\text{und } \log.[10000(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-(q-r)C-10000.a:g] = \log.r+\log.C$$

und wenn man die Logarithmen aufhebt:

$$10000.(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-(q-r)C-10000.a:g = rC$$

$$\text{oder } 10000.(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-10000.a:g = qC$$

Hiervon nehme man die Logarithmen, so wird

$$\log.[10000(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-10000.a:g] = \log.q+\log.C$$

Aus dieser Formel wird nun nach der zweyten Forderung

$$\log.[10000(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-10000.a:g] = \log.q+\log.B-e'[\log.(q+1)-\log.q]$$

Hieraus folgt

$${}^L e' = \frac{\log.q+\log.B-\log.[10000(m+1)-(m-p)A-(p-q)B-10000.a:g]}{\log.(q+1)-\log.q}$$

Hieraus berechne man nun den Werth von e' . Wird dieser Werth positiv, so ist $y=c+d+e'$, wird er $=0$, so ist $y=c+d$; wird er aber negativ, so ist $y<c+d$. In diesem Falle setze man die Untersuchung fort, und sehe, ob sich die Jahre des Holzschlags in einem der d Jahre endigen werden. Daher setze man $y=c+d$,

worinne d' einen noch unbekannten Theil von d bedeutet. Da also $c+d+e'$ für ein negatives e' zu $c+d'$ wird, so setze man $e'=0$ in die Formel ^5L , und in die hierdurch veränderte Formel setze man alsdenn $\log.B=\log.A-d'[\log.(p+1)-\log.p]$ (§. 14.), also d' statt d

Die erste Forderung verändert die Formel ^5L in

$$0 = \frac{\log.q + \log.B - \log.[10000(m+1) - (m-p)A - (p-q)B - 10000.a:g]}{\log.(q+1) - \log.q}$$

$$\text{oder } 0 = \log.q + \log.B - \log.[10000(m+1) - (m-p)A - (p-q)B - 10000.a:g]$$

Hieraus wird

$$\log.[10000(m+1) - (m-p)A - pB + qB - 10000.a:g] = \log.q + \log.B.$$

Man hebe die Logarithmen auf, so wird

$$10000(m+1) - (m-p)A - pB + qB - 10000.a:g = qB$$

$$\text{oder } 10000(m+1) - (m-p)A - 10000.a:g = pB$$

Hiervon nehme man die Logarithmen, so entsteht

$$\log.[10000.(m+1) - (m-p)A - 10000.a:g] = \log.p + \log.B.$$

Aus dieser Formel wird nun nach der zweyten Forderung

$$\log.[10000.(m+1) - (m-p)A - 10000.a:g] = \log.p + \log.A - d'[\log.(p+1) - \log.p]$$

$$\text{und hieraus } d' = \frac{\log.p + \log.A - \log.[10000.a(m+1) - (m-p)A - 10000.a:g]}{\log.(p+1) - \log.p} \quad ^5M.$$

Nach dieser Formel berechne man nun den Werth von d' . Findet man d positiv, so wird $y=c+d'$: wird $d'=0$, so wird $y=c$; wird endlich d negativ, so wird $y < c$, und dann setze man $y=c'$, als einen noch unbekannten Theil von c . Für ein negatives d' wird also c' aus $c+d'$; daher setze man $d'=0$ in die Formel ^5M , und in die hierdurch veränderte Formel $\log.A = \log.10000 - c, [\log.(m+1) - \log.m]$, also c' statt c .

Zu Folge der ersten Forderung wird aus ^5M :

$$0 = \frac{\log.p + \log.A - \log.[10000(m+1) - (m-p)A - 10000.a:g]}{\log.(p+1) - \log.p}$$

$$\text{oder } 0 = \log.p + \log.A - \log.[10000(m+1) - (m-p)A - 10000.a:g]$$

$$\text{oder } \log.[10000.(m+1) - mA + pA - 10000.a:g] = \log.q + \log.A.$$

L

Hier hebe man die Logarithmen auf, so wird

$$10000 \cdot (m+1) - mA + pA - 10000 \cdot a:g] = pA$$

folglich $10000 \cdot [(m+1) - a:g] = mA$

Nimmt man hiervon die Logarithmen, so wird

$$\log. 10000 + \log. [(m+1) - a:g] = \log. m + \log. A$$

Folglich nach der zweyten Forderung

$$\log. 10000 + \log. [(m+1) - a:g] = \log. m + \log. 10000 - c' \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\text{oder } \log. [(m+1) - a:g] = \log. m - c' \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$N. \text{ woraus } c' = \frac{\log. m - \log. [(m+1) - a:g]}{\log. (m+1) - \log. m}$$

Hieraus ist der Werth von $y = c$ zu berechnen.

II. Für $h=1$ gelangt man zur Auflösung mittelst der Formel R ;

$$T = [10000 \cdot (a - mg) + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg] : D - kg$$

worinne T den Waldbestand ausdrückt, der bey einjähriger Schonung nach Verfluß von $c+d+e+f+k$ Jahren noch übrig bleibt. Setzt man hierein $T=0$, so begreift die Gleichung

$$0 = [10000 \cdot (a - mg) + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg] : C - kg$$

alle Bedingungen der Aufgabe für $h=1$ in sich. Hält man nun diese Gleichung mit derjenigen in (I.) von welcher die Formeln I , K u. s. f. N abgeleitet wurden, zusammen, so entdeckt man zwischen beyden weiter keinen Unterschied, als daß hier $10000 \cdot m$ steht, wo man dort $10000 \cdot (m+1)$ antrifft. Gedenkt man sich daher in I überall $10000 m$ statt $10000 (m+1)$, so wird man jene Auflösung wörtlich für diesen Fall anwenden können. Man erhält hierdurch, ohne weitläufige Untersuchung, die zur Auflösung dieses Falls nöthigen Formeln:

$$O. \quad k = [10000 \cdot a:g - 10000 \cdot m + (m-p)A + (p-q)B + (q-r)C + rD] : D$$

$$P. \quad f = \frac{\log. r + \log. C - \log. [10000m - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)C - 10000 \cdot a:g]}{\log. (r+1) - \log. r}$$

$$Q. \quad e' = \frac{\log. q + \log. B - \log. [10000 \cdot m - (m-p)A - (p-q)B - 10000 \cdot a:g]}{\log. (q+1) - \log. q}$$

$$R. \quad d' = \frac{\log. p + \log. A - \log. [10000m - (m-p)A - 10000 \cdot a:g]}{\log. (p+1) - \log. p}$$

$$c' = \frac{\log. m - \log. (m - a : g)}{\log. (m + 1) - \log. m}$$

^{5S.}

Aus diesen fünf Formeln suche man nun den Werth von y ebenso zu bestimmen, wie es in (I.) durch die Formeln ^{5I}, ^{5K}, u. s. f. ^{5N} geschah.

III. Wenn $h < c$ ist, so nehme man seine Zuflucht zu der Formel ^{5M}:

$T = [10000 \cdot a : g - AIg + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg] : D - kg$,
in welcher T den Waldbestand ausdrückt, der nach $c + d + e + f + k$ Jahren übrig ist, wenn der Forst bis in die erste Periode von c Jahren mit Holzschlage verschont wird. Setzt man hierin $T = 0$, so faßt diese Gleichung alle Bedingungen der Aufgabe für $h < c$ in sich. Diese vergleiche man nun mit der Gleichung, woraus in (I.) die Formeln ^{5I}, ^{5K}, u. s. f. ^{5N} hergeleitet wurden, so entdeckt man, daß sie sich von jener nur darinne unterscheidet, daß hier AI steht, wo man dort $10000(m+1)$ antrifft. Man verändere daher in den Formeln ^{5I}, ^{5K}, ^{5L}, und ^{5M} $10000(m+1)$ in AI um, so erhält man die zur Auflösung dieses Falles nöthigen Formeln

$$k = [10000 \cdot a : g - AI + (m-p)A + (p-q)B + (q-r)C + rD] : D \quad ^{5T.}$$

$$f' = \frac{\log. r + \log. -C - \log. [AI - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)C - 10000 \cdot a : g]}{\log. (r+1) - \log. r} \quad ^{5U.}$$

$$e' = \frac{\log. q + \log. B - \log. [AI - (m-p)A - (p-q)B - 10000 \cdot a : g]}{\log. (q+1) - \log. q} \quad ^{5V.}$$

$$d' = \frac{\log. p + \log. A - \log. [AI - (m-p)A - 10000 \cdot a : g]}{\log. (p+1) - \log. p} \quad ^{5W.}$$

Hier fehlt nun noch die Formel, die den Werth von c' bestimmen soll. Diese kann nicht unmittelbar aus der Formel ^{5N} hergeleitet werden, weil man hierinne die GröÙe $10000 \cdot (m+1)$ nicht antrifft, sondern man muß sie durch die Formel ^{5W} eben so gut zu erhalten suchen, wie man ^{5N} aus ^{5M} fand. Man setze daher wie in I $d' = 0$, so wird aus ^{5W}

$$0 = \frac{\log. p + \log. A - \log. [AI - (m-p)A - 10000 \cdot a : g]}{\log. (p+1) - \log. p}$$

$$\text{oder } 0 = \log. p + \log. A - \log. [AI - (m-p)A - 10000 \cdot a : g]$$

und $\log.[AI - (m-p)A - 10000 \cdot a:g] = \log.p + \log.A$

Hier hebe man die Logarithmen auf, so wird

$$AI - (m-p)A - 10000 \cdot a:g = pA$$

$$\text{oder } AI - 10000 \cdot a:g = mA$$

Hiervon nehme man die Logarithmen, so wird

$$\log.[AI - 10000 \cdot a:g] = \log.m + \log.A.$$

Hierein setze man $\log.A = \log.10000 - c' \cdot [\log.(m+1) - \log.m]$ so wird

$$\log.[AI - 10000 \cdot a:g] = \log.m + \log.10000 - c' \cdot [\log.(m+1) - \log.m]$$

$$^X. \text{ woraus } c' = \frac{\log.10000 + \log.m - \log.[AI - 10000 \cdot a:g]}{\log.(m+1) - \log.m}$$

Aus diesen fünf hiergefundenen Formeln bestimme man nun nach und nach den Werth von y , wie es in I durch die Formeln ^{I} , ^{K} u. s. f. ^{N} geschah.

IV. Für $h=c$ sind die zur Auflösung nöthigen Formeln schon in XI. entwickelt und ihr Gebrauch gezeigt worden.

V. Wenn $h > c$ ist, so wird hier die Formel ^{N} :

$$T = [10000 \cdot a - Bkg + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg]:D - kg$$

ihre Dienste leisten. Diese stellt den Waldbestand dar, welcher nach $c+d+e+f+k$ Jahren übrig bleibt, wenn der Forst bis in die zweyte Periode von d Jahren mit Holzschlage verschont bleibt. Setzt man hier $T=0$, so entsteht eine Gleichung, welche alle Bedingungen der Aufgabe für $h > c$ in sich vereint, und ist daher zur Auflösung dieses Falls geschickt. Nun halte man diese Gleichung mit derjenigen in I, nämlich mit

$$0 = [10000 \cdot a - 10000(m+1)g + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg]:D - kg$$

oder $0 = [10000 \cdot a - [10000(m+1) - (m-p)A]g + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg]:D - kg$, woraus die Formeln ^{I} , ^{K} , u. s. f. ^{N} entsprungen, zusammen, so findet man den Unterschied beyder Gleichungen darinne liegen, daß dort $10000(m+1) - (m-p)A$ steht, wo man hier nur BK sieht. Bringt man nun BK statt $10000 \cdot (m+1) - (m-p)A$ in die Formeln ^{I} , ^{K} , ^{L} und ^{M} , so erhält man die zur Auflösung dieses Falls erforderlichen Formeln:

$$k = [10000 \cdot a : g - B \cdot K + (p - q)B + (q - r)C + rD] : D$$

'T.

$$f' = \frac{\log. r + \log. C - \log. [BK - (p - q)B - (q - r)C - 10000 \cdot a : g]}{\log. (r + 1) - \log. r}$$

'Z.

$$c' = \frac{\log. q + \log. B - \log. [BK - (p - q)B - 10000 \cdot a : g]}{\log. (q + 1) - \log. q}$$

'A.

$$d' = \frac{\log. p + \log. A - \log. [BK - 10000 \cdot a : g]}{\log. (p + 1) - \log. p}$$

'B.

wodurch man hier, auf eben die Art, wie in (I.) gezeigt worden ist, den gesuchten Werth von y bestimmen kann. Aus der Formel 'B kann hier für d' kein negativer Werth ausfallen, weil der Forst bis in die Periode von d Jahren mit Holzschlag verschont werden soll. Wenn man daher noch in der Formel 'A zu einem negativen Werth gelangt, so berechnet man aus der Formel 'B den Werth von d' . Als denn ist $y = c + d'$

VI. Wenn $h = c + d$, so erhält man durch die Formel 'T:

$$T = [10000 \cdot a - (q + 1)Bg + (q - r)Cg + rDg] : D - kg$$

die zur Auflösung nöthigen Formeln. Denn hierinne drückt T den nach $c + d + e + f + k$ Jahren rückständigen Waldbestand aus, wenn der Forst $c + d$ Jahre geschont wird. Setzt man $T = 0$, so stellt diese Gleichung die Verhältnisse der in der Aufgabe gegebenen Größen mit der gesuchten im Zusammenhange dar, und unterscheidet sich von der Gleichung

$$0 = [10000 \cdot a - 10000 \cdot (m + 1)g + (m - p)Ag + (p - q)Bg + (q - r)Cg + rDg] : D - kg$$

$$\text{oder } 0 = [10000 \cdot a - [10000 \cdot (m + 1) - (m - p)A - (p - q)B]g + (q - r)Cg + rDg] : D - kg$$

woraus (in I.) die Formeln 'I, 'K u. s. f. 'N gezogen wurden, darinne, daß hier $(q + 1)B$ steht, wo man dort $10000 \cdot (m + 1) - (m - p)A - (p - q)B$ findet. Man vertausche daher in den Formeln 'I, 'K und 'L jene GröÙe mit dieser, so wird

$$k = [10000 \cdot a : g - (q + 1)B + (q - r)C + rD] : D$$

'C.

$$f' = \frac{\log. r + \log. C - \log. [(p + 1)B - (q - r)C - 10000 \cdot a : g]}{\log. (r + 1) - \log. r}$$

'D.

$$c' = \frac{\log. q + \log. B - \log. [(p + 1)B - 10000 \cdot a : g]}{\log. (q + 1) - \log. q}$$

'E.

Aus diesen drey Formeln suche man nun hier, auf die Art, wie in (I.) den gesuchten Werth von y zu bestimmen. Kommt man hierbey auf einen negativen Werth von f' , so ist zuletzt $y = c + d + e'$.

VII. Für $h > c + d$ darf man nur die Formel ^1O :

$$T = [10000 \cdot a - CLg + (q - r)Cg + rDg] : D - kg,$$

welche den Wasdbestand ausdrückt, der nach $c + d + e + f + k$ Jahren übrig bleibt, wenn der Forst bis in die Periode von e Jahren mit Holzschlag verschont wird, auf 0 bringen, so enthält sie die Bedingungen der Aufgabe insgesamt für $h > c + d$. Diese Formel unterscheidet sich von der Formel ^1T in No. VI, woraus die Formeln ^6C , ^6D und ^6E abgeleitet wurden, nur darinne, daß hier CL steht, wo man dort $(p + 1)B$ antrifft. Man kann daher die zur Auflösung dieses Falls erforderlichen Formeln aus ^6C , ^6D , und ^6E erhalten, wenn man in sie CL statt $(p + 1)B$ setzt. Hierdurch erlangt man

$$^6F. \quad k = [10000 \cdot a : g - CL + (q - r)C + rD] : D$$

$$^6G. \quad f' = \frac{\log.r + \log.C - \log.[CL - (q - r)C - 10000 \cdot a : g]}{\log.(r + 1) - \log.r}$$

$$^6H. \quad e' = \frac{\log.q + \log.B - \log.[CL - 10000 \cdot a : g]}{\log.(q + 1) - \log.q}$$

wodurch y hier eben so, wie (in I.) zu bestimmen ist. Hier kann aber, wie in VI, e' nicht negativ werden, weil der Forst bis in die Periode von e' Jahren mit Holzschlag verschont bleibt. Wäre also f' noch negativ gefunden, so müßte $y = c + d + e'$ seyn.

VIII. Wenn $h = c + d + e$ ist, so nehme man die Formel ^1U :

$$T = [10000 \cdot a - (r + 1)Cg + rDg] : D - kg$$

zur Hülfe, wodurch der Waldbestand T bestimmt wird, der nach Ablauf von $c + d + e + f + k$ Jahren noch vorhanden ist, wenn der Forst die ersten $c + d + e$ Jahre hindurch geschont wird. Man setze hierinne $T = 0$, so liegen in dieser Gleichung alle Bedingungen der Aufgabe für $h = c + d + e$. Da sich nun diese von der Gleichung in I, nämlich von

oder $o' = [10000 \cdot a - 10000 \cdot (m+1)g + (m-p)Ag + (p-q)Bg + (q-r)Cg + rDg] : D - kg$
 oder $o = [10000 \cdot a - [10000 \cdot (m+1) - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)C]g + rDg] : D - kg$
 woraus die Formeln ^5I bis ^5N abgeleitet wurden, darinne unterscheidet, dass hier $(r+1)C$ steht, wo man dort $10000 \cdot (m+1) - (m-p)A - (p-q)B - (q-r)C$ antrifft, so setze man $(r+1)C$ statt letzterer Grösse in die Formeln ^5I und ^5K .

Hierdurch findet man die zur Auflösung dieses Falls nöthigen Formeln:

$$k = [10000 \cdot a : g - (r+1)C + rD] : D \quad ^6I.$$

$$f' = \frac{\log. r + \log. C - \log. [(r+1)C - 10000 \cdot a : g]}{\log. (r+1) - \log. r} \quad ^6K.$$

woraus man, wie in I, den gesuchten Werth von y bestimmen kann. Findet man hier k weder positiv, noch 0, sondern negativ, so wird zuletzt $y = c + d + e + f'$.

IX. Für $h > c + d + e$ erreicht man seine Absicht mittelst der Formel ^1P , nämlich durch

$$T = \frac{10000 \cdot a}{D} - Mg + rg - kg$$

$$\text{oder } T = [10000 \cdot a - MDg + rDg] : D - kg$$

in welcher T den nach $c + d + e + f + k$ Jahren noch vorhandenen Waldbestand ausdrückt, wenn der Forst bis in die Periode von f Jahren geschont wird. Setzt man $T = 0$, so entsteht hierdurch eine Gleichung, welche alle Bedingungen der Aufgabe für $h < c + d + e$ in sich begreift. Diese Formel unterscheidet sich von ^1U in No. VIII. darinne, dass hier MD steht, wo man dort $(r+1)C$ antrifft. Daher vertausche man $(r+1)C$ mit MD in den Formeln ^6I und ^6K , so findet man die hier erforderlichen Formeln

$$k = [10000 \cdot a : g - MD + rD] : D$$

$$\text{oder } k = 10000 \cdot a : Dg - M + r$$

$$\text{und } f' = \frac{\log. r + \log. C - \log. [MD - 10000 \cdot a : g]}{\log. (r+1) \log. r}$$

mit welchen man, wie mit ^6I und ^6K in VIII. verfährt.

X. Für $h = c + d + e + f$ verfähre man so: die Formel ^1V , nämlich $T = 10000 \cdot a : D$ bestimmt den Waldbestand, zu dessen Grösse der vorgegebene Forst a nach

$c + d + e + f$ jähriger Schonung anwächst. Dieser Waldbestand soll nun nach den Bedingungen der Aufgabe bey dem Ende der Schonungszeit sogleich und nach Ablauf eines jeden Jahres mit einem Holzschlage von dem Betrage g angegriffen werden, bis der Forst ganz abgeholzt ist. Dieser Fall mag nun nach k Jahren, also nach $k+1$ wiederholten Holzschlägen, welche zusammen $(k+1) \cdot g$ betragen, eintreten, so ist

$$10000 \cdot a : D = (k+1) \cdot g$$

$$\text{und } 10000 \cdot a = (k+1) Dg$$

$$\text{oder } 10000 \cdot a = kDg + Dg$$

$$\text{also } kDg = 10000 \cdot a - Dg$$

$$^6N. \quad \text{und } k = [10000 \cdot a - Dg] : Dg$$

Wenn man hieraus den Werth von k berechnet hat, so ist alsdenn

$$y = c + d + e + f + k.$$

Anmerkung. In allen hier in dieser Auflösung gefundenen Formeln von ^5I an bis ^6N werden die darinne vorkommenden Werthe von A, B, C , u. s. f. durch die in No. X und No. XV. gefundenen Logarithmen derselben bestimmt.

No. XXI.

Ein Waldbestand eines Forstes von a Klaftern ist während $c + d + e + f$ Jahren seinem eigenen ungestörten Nachwuchse überlassen worden, und nach Verfluß der ersten Periode von c Jahren zu einem Waldbestande T''' , nach Verfluß der zweyten Periode von d Jahren zu einem Waldbestande T'' , nach Verfluß der dritten Periode von e Jahren zu einem Waldbestande T' und endlich nach Verfluß der letzten Periode von f Jahren zu einem Waldbestande T angewachsen. Man sucht

[§. 29.
u. 30.]

I. das Verhältniß $m:1$ des jährlichen Wachstums in der ersten Periode von c Jahren, oder die Klafterzahl m , welche jährlich 1 Klafter Nachwuchs gegeben hat.

Auflösung.

Nach No. XII in 1 ist a nach Verfluß der c Jahre zu einem Waldbestande

$$T''' = \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot a$$

angewachsen. Hieraus wird

$$\frac{(m+1)^c}{m^c} = T''' : a \text{ oder } \left(\frac{m+1}{m}\right)^c = T''' : a$$

$$\text{Folglich } \frac{m+1}{m} = [T''' : a]^{\frac{1}{c}}$$

Durch diese Formel könnte man nun schon die unbekannte GröÙe m bestimmen; da aber dieses mit einer mühsamen Ausziehung der Wurzel verbunden ist, so setze man

$$m : m+1 = 1000 : N''' \text{ oder } \frac{m+1}{m} = \frac{N'''}{1000}$$

worinne das Glied 1000 willkürlich angenommen ist. Hierdurch wird

$$\frac{N'''}{1000} = [T''' : a]^{\frac{1}{c}}$$

$$\text{also } N''' = 1000 \cdot [T''' : a]^{\frac{1}{c}}$$

Nimmt man hiervon die Logarithmen, so wird

$$\log. N''' = \log. 1000 + \log. [T''' : a]^{\frac{1}{c}}$$

$$\log. N''' = \log. 1000 + \frac{1}{c} \cdot \log. [T''' : a]$$

$$\text{oder } \log. N''' = \log. 1000 + [\log. T''' - \log. a] : c$$

Wird nun aus dieser Formel der Werth von N''' bestimmt, so findet man aus

$$m : m+1 = 1000 : N'''$$

$$mN''' = 1000 \cdot (m+1)$$

$$mN''' = 1000 \cdot m + 1000$$

$$mN''' - 1000m = 1000$$

$$\text{und endlich } m = 1000 : (N''' - 1000)$$

II. Man sucht das Verhältniß $p:1$ des jährlichen Wachstums in der zweyten Periode von d Jahren, oder die Klafterzahl p , die jährlich eine Klafter Nachwuchs gegeben hat, wenn das Verhältniß $m:1$ des jährlichen Wachstums in der ersten Periode bekannt ist.

Auflösung.

Nach No. XII. in 1 ist der Waldbestand a nach Verfluß der zweyten Periode von d Jahren zu einem Waldbestande

$$T'' = \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot a = \left(\frac{m+1}{m}\right)^c \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)^d \cdot a$$

angewachsen; hieraus wird

$$\left(\frac{p+1}{p}\right)^d = T'' : \left(\frac{m+1}{m}\right)^c \cdot a$$

$$\text{und } \frac{p+1}{p} = \left[T'' : \left(\frac{m+1}{m}\right)^c \cdot a \right]^{\frac{1}{d}}$$

Um nun hier der Ausziehung der Wurzel zu entgehen, so setze man

$$p:(p+1) = 1000:N'' \text{ oder } \frac{p+1}{p} = \frac{N''}{1000}$$

$$\text{Hierdurch wird } \frac{N''}{1000} = \left[T'' : \left(\frac{m+1}{m}\right)^c \cdot a \right]^{\frac{1}{d}}$$

$$\text{und } N'' = 1000 \cdot \left[T'' : \left(\frac{m+1}{m}\right)^c \cdot a \right]^{\frac{1}{d}}$$

Nimmt man hiervon die Logarithmen, so wird.

$$\log. N'' = \log. 1000 + \log. \left[T'' : \left(\frac{m+1}{m}\right)^c \cdot a \right]^{\frac{1}{d}}$$

$$\text{oder } \log. N'' = \log. 1000 + \frac{1}{d} \cdot \left[\log. T'' - \log \left[a \cdot \left(\frac{m+1}{m}\right)^c \right] \right]$$

und hierinne ist

$$\log. \left[a \cdot \left(\frac{m+1}{m}\right)^c \right] = \log. a + c \cdot \log \left(\frac{m+1}{m}\right)$$

$$\text{oder } \log. \left[a \cdot \left(\frac{m+1}{m} \right)^c \right] = \log. a + c \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

Dies setze man in letztere Formel, so wird

$$\log. N'' = \log. 1000 + [\log. T'' - \log. a - c[\log. (m+1) - \log. m]] : d$$

Wenn man nun hieraus den Werth von N'' bestimmt hat, so findet man aus der Proportion

$$p : p+1 = 1000 : N''$$

durch einen ähnlichen Schluss, wie am Ende der vorigen Auflösung, die Klafterzahl

$$p = 1000 : [N'' - 1000]$$

6p.

III. Man sucht das Verhältniß $q:1$ des jährlichen Wachstums in der dritten Periode von e Jahren, oder die Klafterzahl q , die jährlich eine Klafter Nachwuchs gegeben hat, wenn die Verhältnisse $m:1$, $p:1$ aus den vorhergehenden beyden Perioden schon bekannt sind.

Auflösung.

Nach No. XII. in 1 erwächst aus einem Waldbestande a nach Verfluß der dritten Periode von e Jahren ein Waldbestand

$$T' = \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot a = \left(\frac{m+1}{m} \right)^c \left(\frac{p+1}{p} \right)^d \left(\frac{q+1}{q} \right)^e \cdot a$$

Hieraus entsteht

$$\left(\frac{q+1}{q} \right)^e = T' : \left(\frac{m+1}{m} \right)^c \cdot \left(\frac{p+1}{p} \right)^d \cdot a$$

$$\text{und } \frac{q+1}{q} = \left[T' : a \cdot \left(\frac{m+1}{m} \right)^c \left(\frac{p+1}{p} \right)^d \right]^{\frac{1}{e}}$$

Man setze hier das Verhältniß

$$q : q+1 = 10000 : N' \text{ oder } \frac{q+1}{q} = \frac{N'}{1000}$$

$$\text{so wird } \frac{N'}{1000} = \left[T' : a \cdot \left(\frac{m+1}{m} \right)^c \left(\frac{p+1}{p} \right)^d \right]^{\frac{1}{e}}$$

$$\text{und } N' = 1000 \cdot \left[T' : a \cdot \left(\frac{m+1}{m} \right)^c \left(\frac{p+1}{p} \right)^d \right]^{\frac{1}{e}}$$

$$\text{und } \log. N' = \log. 1000 + \log. \left[T' : a \cdot \left(\frac{m+1}{m} \right)^c \left(\frac{p+1}{p} \right)^d \right]^{\frac{1}{e}}$$

$$\text{oder } \log. N' = \log. 1000 + \left[\log. T' - \log. a - \log. \left(\frac{m+1}{m} \right)^c - \log. \left(\frac{p+1}{p} \right)^d \right] : e$$

$$\text{Hierinne ist aber } \log. \left(\frac{m+1}{m} \right)^c = c \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\text{und } \log. \left(\frac{p+1}{p} \right)^d = d \cdot [\log. (p+1) - \log. p]$$

Setzt man diese beyden Werthe in letztere Gleichung, so wird

$$\log. N' = \log. 1000 + [\log. T' - \log. a - c \cdot [\log. (m+1) - \log. m] - d \cdot [\log. (p+1) - \log. p]] : e$$

Wenn man nun aus diesem Logarithmen den Werth von N' bestimmt, so findet man die gesuchte Klafterzahl q aus der Proportion

$$q : q+1 = 1000 : N'$$

$$\text{nämlich } q = 1000 : (N' - 1000).$$

IV. Man sucht das Verhältniß $r:1$ des jährlichen Wachstums in der letzten Periode von f Jahren, oder die Klafterzahl r , die jährlich eine Klafter Zuwachs gehabt hat, wenn die Verhältnisse $m:1$, $p:1$, $q:1$ des jährlichen Wachstums in den vorhergehenden Perioden schon bekannt sind.

Auflösung.

Nach No. XII in 1 erwächst aus einem Waldbestande a , nach Verfluß von $c+d+e+f$ Jahren, ein Waldbestand

$$T = \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot a$$

Setzt man nun wie in No. X

$$(m+1)^c : m^c = 10000 : A$$

$$(p+1)^d : p^d = A : B$$

$$(q+1)^e : q^e = B : C$$

so entsteht durch die Multiplication dieser drey Proportionen

$$(m+1)^c (p+1)^d (q+1)^e : m^c \cdot p^d \cdot q^e = 10000 : C$$

$$\text{oder } \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} = \frac{10000}{C}$$

Setzt man diesen Werth in obige Gleichung, so wird

$$T = \frac{10000}{C} \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot a$$

$$\text{oder } T = \frac{10000}{C} \cdot \left(\frac{r+1}{r} \right)^f \cdot a$$

$$\text{und } CT = 1000 \cdot a \cdot \left(\frac{r+1}{r} \right)^f$$

$$\text{und } CT : 1000 \cdot a = \left(\frac{r+1}{r} \right)^f$$

$$\text{und } [CT : 1000 \cdot a]^{\frac{1}{f}} = (r+1) : r$$

Damit man nun auch hier der Ausziehung der Wurzel entgehe, so setze man

$$r+1 : r = N : 1000$$

$$\text{so wird } [CT : 1000 \cdot a]^{\frac{1}{f}} = N : 1000$$

$$\text{also } 1000 \cdot [CT : 1000 \cdot a]^{\frac{1}{f}} = N$$

Nimmt man hiervon die Logarithmen, so wird

$$\log. N = \log. 1000 + \log. [CT : 1000 \cdot a]^{\frac{1}{f}}$$

$$= \log. 1000 + \frac{1}{f} \cdot \log. [CT : 1000 \cdot a]$$

$$= \log. 1000 + [\log. CT - \log. 1000 \cdot a] : f$$

$$= \log. 1000 + [\log. T + \log. C - \log. 10000 - \log. a] : f$$

$$= \log. 1000 + [\log. T - \log. a - \log. 10000 + \log. C] : f$$

Aber aus obigen drey Proportionen entsteht nach No. X

$$\log. A = \log. 10000 - c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. B = \log. A - d. [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. C = \log. B - e. [\log. (q+1) - \log. q]$$

und wenn man diese drey Gleichungen addirt, und auf beyden Seiten $\log. A$ und $\log. B$ gleich wegläßt, so wird

$$\log. C = \log. 10000 - c. [\log. (m+1) - \log. m] - d. [\log. (p+1) - \log. p] - e. [\log. (q+1) - \log. q]$$

Wenn man nun diesen Werth von $\log. C$ in letzte Formel von $\log. N$ setzt, so hebt sich $\log. 10000$ weg, weil in beyden Formeln $\log. 10000$ mit entgegengesetzten Zeichen steht; und es wird

$$\log. N = \log. 10000 + [\log. T - \log. a - c. [\log. (m+1) - \log. m] - d. [\log. (p+1) - \log. p] - e. [\log. (q+1) - \log. q]] : f$$

Wenn man nun hieraus den Werth von N bestimmt hat, so findet man aus der Proportion

$$r+1:r = N:1000$$

⁶R. Die Klafterzahl $r = 1000:(N-1000)$

Anmerk. 1. Nach der Anweisung dieser vier Formeln ⁶O, ⁶P, ⁶Q und ⁶R wird durch m, p, q und r gefunden, wie viel Klaftern Waldbestand in einem jeden der $c+d+e+f$ Jahre eine Klafter Zuwachs gehabt haben, wenn ein in diesen $c+d+e+f$ Jahren gänzlich geschonter Waldbestand a in eben solcher Zeit zu einem Waldbestande T angewachsen ist.

Anmerk. 2. Die Formel, die Hr. v. O. im 30 §. für $c=d=e=0$ aus den 29 §. hergeleitet, hat keine andere Bedeutung, als die hier in I gefundene, wovon man sich gleich überzeugen kann, wenn man in die Formeln des 30 §. N'' , T'' und m statt N , T und f setzt; denn durch die Vernichtung der Werthe c, d, e hat Hr. v. O. die letzte Periode auf die erste gebracht.

Anmerk. 3. Es ist in diesen vier Auflösungen für jede Periode eine besondere Formel gegeben worden, woraus man das in ihr statt gefundene Verhältniß des

jährlichen Wachstums finden kann. Hr. v. O. hingegen hat im 29 §. nur die Formel für die vierte Periode von f Jahren bekannt gemacht, nämlich

$$r = 1000 : (N - 1000)$$

in welcher der Werth von N durch die Formel

$$\log. N = \log. 1000 + [\log. T - \log. a - c. [\log. (m+1) - \log. m] - d. [\log. (p+1) - \log. p] - e. [\log. (q+1) - \log. q]] : f$$

gefunden wird.

Im 30 §. setzt nun Hr. v. O. $c=d=e=0$, wodurch

$$e. [\log. (m+1) - \log. m] = d. [\log. (p+1) - \log. p] = e. [\log. (q+1) - \log. q] = 0$$

$$\text{also } \log. N = \log. 1000 + \log. [T - \log. a] : f$$

wird. Wenn man nun hieraus den Werth von N bestimmt hat, so wird

$$r = 1000 : (N - 1000) \quad (\text{Siehe } ^6R)$$

und nach Anweisung dieser Formel wird durch r gefunden, wie viel Klaftern Waldbestand in einem jeden der f Jahre eine Klafter Zuwachs gehabt, wenn ein in diesen f Jahren gänzlich geschonter Waldbestand a in eben solcher Zeit zu einem Waldbestande T angewachsen ist.

Diese Formel kann nun auch zur Auflösung voriger Aufgabe, nämlich zur Aufsuchung der Wachstumsverhältnisse, die in den vier Perioden von c , d , e und f Jahren statt gefunden haben, angewandt werden, wenn man statt a den Waldbestand, der bey dem Anfange irgend einer dieser vier Perioden, und statt T denjenigen, der nach Verfluß dieser Periode vorgefunden worden ist, und statt f die Anzahl Jahre setzt, welche diese Periode enthalten hat, wodurch sich für r diejenige Anzahl Klaftern ergibt, die in jedem Jahre dieser Periode eine Klafter Zuwachs gegeben hat. Wenn man nun so die Anwendung dieser Formel auf jede Periode macht, so findet man die gesuchten Zuwachsverhältnisse von allen Perioden.

No. XXII.

Gesetzt die Erfahrung habe ausgewiesen, daß ein Waldbestand $\alpha. a$ in v Jah- [§. 31.] ren durch gänzliche Verschonung mit Holzschlage zu einem Waldbestande $\omega. a$ gebracht worden ist; man sucht das Verhältniß $m:1$ des jährlichen Zuwachses.

Auflösung.

Man setze $\alpha \cdot a$ statt a , $\omega \cdot a$ statt T , ν statt f , und m statt r in die Formel ${}^4E$, wodurch N zu τ werde, so wird

$$\begin{aligned}\log. \tau &= \log. 1000 + [\log. \omega a - \log. \alpha a] : \nu \\ &= \log. 1000 + [\log. \omega + \log. a - \log. \alpha - \log. a] : \nu \\ &= \log. 1000 + [\log. \omega - \log. \alpha] : \nu\end{aligned}$$

$$\text{und } m = 1000 : (\tau - 1000).$$

${}^6T$. Man findet also die gesuchte Klafterzahl m aus

$$m = 1000 : (\tau - 1000)$$

wenn man zuvor den Werth von τ durch die Gleichung

$$\log. \tau = \log. 1000 + [\log. \omega - \log. \alpha] : \nu$$

bestimmt hat.

Da sich in diesen Formeln die Grösse a ganz weggehoben hat, so braucht sie auch in der Aufgabe nicht nothwendig als Datum vorzukommen, sondern es ist genug, wenn nur das Verhältniß $\alpha : \omega$ der beyden Waldbestände $\alpha \cdot a$ und $\omega \cdot a$ gegeben wird, wodurch auch die Aufgabe eine noch grössere Allgemeinheit erhält. Aus der Formel ${}^6T$ kann man nun folgende einfachere herleiten, worzu folgende Aufgaben Anleitung geben.

1) Es ist ein Waldbestand a , n Jahre hindurch, seinem ungestörten Wachstume überlassen gewesen, und hat sich in solcher Zeit auf einen doppelten Betrag 2α gemehrt, man sucht, wie viel Klaftern sich jährlich um eine Klafter vermehrt haben.

Auflösung.

Die gesuchte Klafterzahl sey $= m$. Da sich der Waldbestand a vor dem Anfange der n Jahre zu dem Waldbestande 2α nach Verfluß der n Jahre verhält, wie $1:2$, so setze man $\alpha = 1$, $\omega = 2$, ferner $\nu = n$ in die Formel ${}^6S$. Hierdurch werde τ zu π ; daher wird

$$\log. \pi = \log. 1000 + (\log. 2 - \log. 1) : n$$

Da nun $\log. 1 = 0$, $\log. 1000 = 3$ und $\log. 2 = 0,3010300$, so wird

$$\log. \pi = 3,3010300 : n$$

Bestimmt man hieraus den Werth von π , so findet man die gesuchte Klaf-
 terzahl

$$n = 1000 : (\pi - 1000)$$

6U.

2) Eben dieser doppelte Betrag $2a$ des ehemaligen Waldbestandes a ist bey
 weiterer gänzlichen Schonung in v Jahren auf den Betrag $3a$ angewachsen, man
 soll das während dieser Zeit statt gefundene Verhältniß $\mu:1$ des jährlichen Wachs-
 thums bestimmen.

Auflösung.

Es verhält sich der Waldbestand $2a$ vor v Jahren zu dem Waldbestande $3a$
 nach Verfluß dieser Jahre, wie $2:3$. Man setze daher $\alpha = 2$, $\omega = 3$, $v = v$ in die For-
 mel 6T. Hierdurch werde τ zu ϱ , also

$$\log. \varrho = \log. 1000 + (\log. 3 - \log. 2) : v$$

Da nun $\log. 3 = 0,47712121$ und $\log. 2 = 0,30103001$

also $\log. 3 - \log. 2 = 0,1760912$ und $\log. 1000 = 3$

so wird $\log. \varrho = 3,1760912 : v$

Wird hieraus der Werth von ϱ bestimmt, so findet man die gesuchte Klaf-
 terzahl μ aus

$$\mu = 1000 : (\varrho - 1000)$$

6V.

No. XXIII.

Im Fall bekannt wäre, daß ein gewisser Waldbestand in c Jahren in dem [§. 32.]
 Verhältnisse $m:1$, in d Jahren, wie $p:1$, in e Jahren, wie $q:1$, und in f Jahren,
 wie $r:1$ durch eigenen Zuwachs sich jährlich gemehret habe, für alle diese Jahre
 ein mittleres Verhältniß dieses Zuwachses $s:1$ zu finden, das heißt, ein solches
 Verhältniß, das in jedem der $c+d+e+f$ Jahre einerley bleibt, und bey welchem

der Forst in der Summe dieser Jahre zu eben der Gröfse anwächst, als bey jenen verschiedenen Zuwachsverhältnissen.

Auflösung.

I. Wenn ein Waldbestand a in c Jahren in dem Verhältnisse $m:1$; in d Jahren, wie $p:1$; in e Jahren, wie $q:1$, und in f Jahren, wie $r:1$ sich jährlich gemehrt hat, so hat er nach Verfluß von $c+d+e+f$ Jahren den Waldbestand

$$\frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot a \quad (\text{No. XII. in I.})$$

erreicht. Wenn hingegen dieser Waldbestand a in $c+d+e+f$ Jahren nach dem Verhältnisse $s:1$ seinen jährlichen Zuwachs erhalten hätte, so würde er nach Verfluß dieser Jahre zu dem Waldbestand

$$\frac{(s+1)^{c+d+e+f}}{s^{c+d+e+f}} \cdot a \quad (\text{Form. D.})$$

angewachsen seyn. Ist nun $s:1$ das mittlere Verhältniß von $m:1$, $p:1$, $q:1$ und $r:1$, so sind die hier gefundenen Waldbestände einander gleich, nämlich

$$\frac{(s+1)^{c+d+e+f}}{s^{c+d+e+f}} \cdot a = \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f} \cdot a$$

$$\text{oder} \left(\frac{s+1}{s} \right)^{c+d+e+f} = \frac{(m+1)^c}{m^c} \cdot \frac{(p+1)^d}{p^d} \cdot \frac{(q+1)^e}{q^e} \cdot \frac{(r+1)^f}{r^f}$$

$$\text{Man setze nun nach No. X. } \frac{(m+1)^c}{m^c} = \frac{E}{F}, \frac{(p+1)^d}{p^d} = \frac{F}{G}, \frac{(q+1)^e}{q^e} = \frac{G}{H},$$

$$\frac{(r+1)^f}{r^f} = \frac{H}{I} \text{ und überdieß } \frac{s+1}{s} = \frac{N}{1000}, \text{ so wird}$$

$$\left(\frac{N}{1000} \right)^{c+d+e+f} = \frac{E}{F} \cdot \frac{F}{G} \cdot \frac{G}{H} \cdot \frac{H}{I}$$

$$\text{oder} \left(\frac{N}{1000} \right)^{c+d+e+f} = E$$

$$\begin{aligned}\text{folglich } \log. E &= \log. \left(\frac{N}{1000} \right)^{c+d+e+f} \\ &= (c+d+e+f) \cdot (\log. N - \log. 1000) \\ &= (c+d+e+f) \cdot \log. N - (c+d+e+f) \cdot \log. 1000\end{aligned}$$

Hieraus wird $(c+d+e+f) \cdot \log. N = (c+d+e+f) \cdot \log. 1000 + \log. E$
und $\log. N = \log. 1000 + \log. E : (c+d+e+f).$

Wenn man nun den Werth von $\log. E$ nach und nach durch die Formeln
(No. X.)

$$\begin{aligned}\log. H &= f \cdot [\log. (r+1) - \log. r] \\ \log. G &= \log. H + e \cdot [\log. (q+1) - \log. q] \\ \log. F &= \log. G + d \cdot [\log. (p+1) - \log. p] \\ \log. E &= \log. F + c \cdot [\log. (m+1) - \log. m]\end{aligned}$$

oder auf einmal durch die Formel

$$\begin{aligned}\log. E &= c \cdot [\log. (m+1) - \log. m] + d \cdot [\log. (p+1) - \log. p] \\ &\quad + e \cdot [\log. (q+1) - \log. q] + f \cdot [\log. (r+1) - \log. r]\end{aligned}$$

sucht, welche aus der Addition der vorigen vier Gleichungen, mit Hinweglassung
der auf beyden Seiten gleichen Grössen $\log. H$, $\log. G$ und $\log. F$ entsteht; und dann
den Werth von N aus der Gleichung

$$\log. N = \log. 1000 + \log. E : (c+d+e+f)$$

bekannt macht, so findet man hierauf aus der Gleichung

$$\frac{s+1}{s} = \frac{N}{1000}$$

den Werth von $s = 1000 : (N - 1000)$

also auch das gesuchte mittlere Verhältniss $s:1$ des jährlichen Wachstums.

W.

II. In dem Eingange voriger Auflösung wurde gefunden

$$\begin{aligned}\frac{(s+1)^{c+d+e+f}}{s^{c+d+e+f}} \cdot a &= \frac{(m+1)^c \cdot (p+1)^d \cdot (q+1)^e \cdot (r+1)^f \cdot a}{m^c \cdot p^d \cdot q^e \cdot r^f} \\ \text{also } \frac{(s+1)^{c+d+e+f}}{s^{c+d+e+f}} &= \frac{(m+1)^c \cdot (p+1)^d \cdot (q+1)^e \cdot (r+1)^f}{\underline{m^c} \cdot p^d \cdot q^e \cdot r^f} \\ &\quad N 2\end{aligned}$$

Diese Gleichung giebt zu erkennen, wie die Gröſſen s, m, p, q, r, c, d, e und f von einander abhängen, wenn ein gewisser Waldbestand in c Jahren in dem Verhältniſſe $m:1$, in den d Jahren, wie $p:1$, in den e Jahren, wie $q:1$, und in den f Jahren, wie $r:1$ durch eigenen Zuwachs ſich gemehret hat, und $s:1$ das mittlere Verhältniſſe für alle dieſe Jahre anzeigt. Hr. v. O. ſetzt nun in dieſer Gleichung die Nenner einander gleich, nämlich

$$s^{c+d+e+f} = m^c \cdot p^d \cdot q^e \cdot r^f$$

$$\text{folglich } \log. s^{c+d+e+f} = \log. m^c + \log. p^d + \log. q^e + \log. r^f$$

$$\text{und } (c+d+e+f) \cdot \log. s = \log. c \cdot \log. m + d \cdot \log. p + e \cdot \log. q + f \cdot \log. r$$

$$\text{und } \log. s = \frac{c \cdot \log. m + d \cdot \log. p + e \cdot \log. q + f \cdot \log. r}{c+d+e+f}$$

woraus man den Werth von s , und alſo das geſuchte mittlere Verhältniſſe $s:1$ finden ſoll. Hierinne hat ſich aber der würdige Hr. Verfaſſer der Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehaue geirrt: denn, wenn man in der Gleichung

$$\frac{(s+1)^{c+d+e+f}}{s^{c+d+e+f}} = \frac{(m+1)^c \cdot (p+1)^d \cdot (q+1)^e \cdot (r+1)^f}{m^c \cdot p^d \cdot q^e \cdot r^f}$$

die Nenner einander gleich ſetzt, ſo folgt hieraus auch die Gleichheit der Zähler. Dieſe beyden Gleichungen

$$s^{c+d+e+f} = m^c \cdot p^d \cdot q^e \cdot r^f$$

$$\text{und } (s+1)^{c+d+e+f} = (m+1)^c \cdot (p+1)^d \cdot (q+1)^e \cdot (r+1)^f$$

können aber bey der Verſchiedenheit der Werthe m, p, q und r , nicht mit einander beſtehen, ſondern führen, wie die Folge zeigen wird, auf einen Widerſpruch. Wenn man alſo die Nenner nicht einander gleich ſetzen darf, ſo iſt auch die Formel

$$\log. s = \frac{c \cdot \log. m + d \cdot \log. p + e \cdot \log. q + f \cdot \log. r}{c+d+e+f}$$

welche aus der Gleichheit der Nenner ihren Urfprung hat, für die Anwendung unbrauchbar und unrichtig. Denn wären die beyden Gleichungen richtig, ſo müßten ſie ihre Gültigkeit behaupten, was für Werthe man auch für c, d, e und f annehmen mag. Man ſetze nun $c=d=1$ und $e=f=0$, ſo wird $q^e=q^0=1$,

$r^f = r^e = 1$, $(q+1)^e = (q+1)^e = 1$, $(r+1)^f = (r+1)^e = 1$, und $c+d+e+f = 2$, also

$$s^2 = mp \quad (1.)$$

$$(s+1)^2 = (m+1) \cdot (p+1) \quad (2.)$$

Aus (1) folgt $s = \sqrt{mp} \quad (3.)$

aus (2) $s+1 = \sqrt{(mp+m+p+1)} \quad (4.)$

Man substituirt den Werth von s aus 3 in 4, so wird

$$\sqrt{mp} + 1 = \sqrt{(mp+m+p+1)}$$

Man quadriert diese Gleichung, so wird

$$mp + 2\sqrt{mp} + 1 = mp + m + p + 1$$

Man subtrahirt von beyden Theilen dieser Gleichung $mp+1$, so bleibt

$$2\sqrt{mp} = m + p$$

Man quadriert diese Gleichung, so wird

$$4mp = m^2 + 2mp + p^2$$

$$\text{also } m^2 - 2mp + p^2 = 0$$

$$\text{oder } (m-p)^2 = 0$$

$$\text{folglich } m-p = 0$$

$$\text{also } m = p$$

welches den Bedingungen der Aufgabe widerspricht, wornach die Werthe von m , p , q und r verschieden sind.

No. XXIV.

1) Es ist der Grundflächeninhalt eines Gehäues $= G$, und der gefällte Holzbetrag [§.38] desselben $= g$ bekannt; man sucht den Betrag T eines gleich schlagbaren Forstes, dessen Grundflächenraum $= T$, wenn der Waldraum G mit dem gefällten Holzbetrage g nach Verhältniß eben so austräglich bestanden gewesen, als es der Grundflächenraum T gegenwärtig ist.

Auflösung.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist

$$G : g = T : T$$

6X. woraus

$$T = g \cdot T : G.$$

2) Es wurden zwey gleich groſſe und gleich tragbare Waldräume, die mit einerley Holze bestanden, und in gleicher Zeit gleich dicht aufgewachsen waren, zu unterschiedenen Zeiten abgeholzet. Der von diesen Holzschlägen zuerst erfolgende hat g Klaftern, die in n Jahren darauf bewerkstelligte Abholzung des zweyten eben dieser Räume hat hingegen g Klaftern Austrag gegeben; man soll untersuchen, wie viel Klaftern r des zuletzt niedergeschlagenen Holzbestandes g in jedem der n Jahre, und nach einem gemeinen Durchschnitte auf diese Jahre gerechnet, eine Klafter Zuwachs gegeben haben.

Auflösung.

Diese Aufgabe kann durch die Formel 6S aufgelöst werden, wenn man in sie $T = g$, $g = a$, $f = n$, und $m = r$ setzt. Hierdurch findet man

6X.
$$r = 1000 : (N - 1000)$$

worinne der Werth von N durch

$$\log. N = \log. 1000 + (\log. g - \log. g) : n$$

zu bestimmen ist.

Anmerk. Wenn hier $n = 1$ ist, so wird

$$\log. N = \log. 1000 + \log. g - \log. g$$

Hebt man in dieser Gleichung die Logarithmen wieder auf, so wird

$$N = 1000 \cdot \frac{g}{g}$$

folglich

$$r = 1000 : (1000 \cdot \frac{g}{g} - 1000)$$

$$r = 1000 : 1000 \cdot (\frac{g}{g} - 1)$$

$$r = 1 : \left(\frac{g}{g} - 1 \right)$$

$$r = g : g \left(\frac{g}{g} - 1 \right)$$

endlich

$$r = g : (g - g)$$

‘Z.

3) Es wurde von dem Bestande eines Forstes, dessen unterschiedene Räume, in Ansicht des Alters und des Wachstums seines gleich dicht aufgewachsenen Holzes, merklich nicht unterschieden waren, eine gewisse Klafterzahl g niedergeschlagen, und dadurch ein Raum abgetrieben, dessen Grundflächeninhalt $= A$ war. Nach Verfluß darauf folgender n Jahre aber, wurde zur Erlangung ebendesselben Holzbetrags g von ebendemselben Waldbestande nur die Beräumung eines kleinern Waldgrundflächenraums B erfordert; man soll das in den n Jahren, mit Aufhebung des mehrern und wenigern von unterschiedenen Jahren gegeneinander, statt gefundene Verhältniß $m:1$ des jährlichen Zuwachses dieses Forstes finden.

Auflösung.

Man untersuche erst, wie viel Klaftern Holz von n Jahren auf dem Grundflächenraume B gestanden haben, Es habe nun zu der Zeit die Klafterzahl g' den Raum B eingenommen. Der Forst ist nach der Aufgabe gleich dicht mit Holz bestanden, daher ist, weil auf dem Flächenraum A g Klaftern standen

$$A : B = g : g'$$

und hieraus

$$g' = g \cdot \frac{B}{A}$$

Es sind also $g \cdot \frac{B}{A}$ Klaftern in n Jahren zu g Klaftern geworden. Man vergleiche nun diese drey Größen $g \cdot \frac{B}{A}$, g und n mit a , T und f in der Formel S und setze darinne g statt T , $g \cdot \frac{B}{A}$ statt a , und n statt f , überdieß m statt r , so findet man

$$\log. N = \log. 1000 + (\log. g - \log. g \cdot \frac{B}{A}) : n$$

Hierinne ist aber

$$\log. g \cdot \frac{B}{A} = \log. g + \log. B - \log. A$$

und daher $\log. g - \log. g \cdot \frac{B}{A} = \log. g - (\log. g + \log. B - \log. A)$

$$= \log. g - \log. g - \log. B + \log. A$$

$$= \log. A - \log. B$$

folglich $\log. N = \log. 1000 + (\log. A - \log. B) : n$

Wenn man nun hieraus den Werth von N bestimmt, so findet man die gesuchte Klafterzahl m aus

^{7A.} $m = 1000 : (N - 1000)$

Anmerk. Für $n = 1$ wird

$$\log. N = \log. 1000 + (\log. A - \log. B)$$

und nach der Wiederaufhebung der Logarithmen

$$N = 1000 \cdot \frac{A}{B}$$

folglich $m = 1000 : (1000 \cdot \frac{A}{B} - 1000)$

oder $m = 1 : (\frac{A}{B} - 1)$

^{7B.} oder $m = B : (A - B)$

No. XXV.

[§.38.] Ein Forst habe, von der Zeit seiner Saamenkeimung an, das Alter von y Jahren erreicht, und ist jetzt zu einem Waldbestande von T Centnern Holz angewachsen. Bey der Besaamung dieses Forstes war η das Gewicht der erforderlichen Saamenmenge. Man soll das Gesetz aufsuchen, wornach sich das Holz in den aufeinander folgenden Jahren vermehret hat.

Auflösung.

I. Es drücke μ die in jedem Jahre veränderliche Centnerzahl aus, welche einen Centner Zuwachs giebt; λ sey eine ganze oder gebrochne Zahl, die für jede Gattung Holzes besonders ausfällt, und ν sey eine veränderliche Zahl, die, von der Saamenauskeimung an, des Holzes Alter anzeigt. $\mu = \nu\lambda$ sey nun diejenige Function, welche für jedes ν te Jahr durch ihren Werth bestimmt, wie viel Centner Holz einen Centner Zuwachs gegeben haben.

Nach diesem Gesetze $\mu = \nu\lambda$ hätten denn
im 1ten Jahre jede $\mu = \lambda$ Centner

$$\begin{array}{rcl} \text{2ten} & - & \mu = 2\lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{3ten} & - & \mu = 3\lambda \end{array}$$

u. s. f.

jedes Mahl einen Centner Zuwachs gehabt. Es wäre also jeder Theil $\mu = \nu\lambda$ des nach Verfluß von $\nu - 1$ Jahren vorhandenen Waldbestandes, nach Beendigung des darauf folgenden Jahres, zu $\mu + 1 = \nu\lambda + 1$ angewachsen, was auch ν für eine ganze Zahl bedeuten mag. Demnach mögen hier und in den folgenden Beyspielen $^1\eta$, $^2\eta$, $^3\eta$ u. s. f. die nach Verfluß des ersten, 2ten, 3ten, u. s. f. ν ten Jahres die vorhandenen Waldbestände durchs Gewicht ausdrücken, so wird

jeder Theil λ des Waldbestandes η nach Ablauf eines Jahres zu $\lambda + 1$

$$\begin{array}{rcl} \text{2}\lambda & - & ^1\eta \end{array} \quad \begin{array}{rcl} & - & 2\lambda + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{3}\lambda & - & ^2\eta \end{array} \quad \begin{array}{rcl} & - & 3\lambda + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{4}\lambda & - & ^3\eta \end{array} \quad \begin{array}{rcl} & - & 4\lambda + 1 \end{array}$$

u. s. f.

u. s. f.

u. s. f.

werden; daher finden folgende Proportions statt:

$$\lambda : \lambda + 1 = \eta : ^1\eta$$

$$2\lambda : 2\lambda + 1 = ^1\eta : ^2\eta$$

$$3\lambda : 3\lambda + 1 = ^2\eta : ^3\eta$$

u. f. f.

$$\nu\lambda : \nu\lambda + 1 = ^{\nu-1}\eta : ^\nu\eta$$

Wenn man nun diese Proportions durch einander multiplicirt, so wird
 $\lambda \cdot 2\lambda \cdot 3\lambda \dots \nu\lambda : (\lambda+1) \cdot (2\lambda+1) \cdot (3\lambda+1) \dots (\nu\lambda+1) = \eta \cdot {}^1\eta \cdot {}^2\eta \dots {}^{\nu-1}\eta : {}^1\eta \cdot {}^2\eta \cdot {}^3\eta \dots {}^\nu\eta$

In dem ersten Gliede dieser Proportion kommt λ so vielmahl als Factor vor, als ν Einheiten enthält; daher kann man diese einzelnen Factoren in λ^ν zusammenziehen. Das dritte und vierte Glied kann durch den gemeinschaftlichen Factor ${}^1\eta \cdot {}^2\eta \cdot {}^3\eta \dots {}^{\nu-1}\eta$ dividirt werden. Nimmt man nun diese Veränderung vor, so entsteht

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots \nu \cdot \lambda^\nu : (\lambda+1) \cdot (2\lambda+1) \cdot (3\lambda+1) \cdot (4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1) \dots (\nu\lambda+1) = \eta : {}^\nu\eta$$

Hieraus folgt der nach ν Jahren vorhandene Waldbestand

$${}^\nu\eta = \frac{(\lambda+1)(2\lambda+1) \cdot (3\lambda+1) \cdot (4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1) \dots (\nu\lambda+1)\eta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots \nu \cdot \lambda^\nu} \text{ Centner}$$

So groß müßte also ein Waldbestand zu der Zeit, da das Holz das Alter von ν Jahren erreicht hat, seyn, wenn das angenommene Gesetz $\mu = \nu\lambda$ gültig seyn sollte. Kommt nun bey irgend einer Bestimmung von λ der Werth von ${}^\nu\eta$ dem Werthe T gleich oder nahe, so ist $\mu = \nu\lambda$ das Gesetz des Wachstums; findet man aber keine Zahl für λ , die ${}^\nu\eta$ dem T nahe brächte, so muß man den Versuch mit einer andern Function machen, wie folget.

II. Würde $\mu = \nu\lambda^{\nu-1}$ zum Versuche angenommen, so wäre

$$\text{im 1ten Jahre } \mu = 1 \cdot \lambda^{1-1} = 1$$

$$\text{im 2ten Jahre } \mu = 2 \cdot \lambda^{2-1} = 2\lambda$$

$$\text{im 3ten Jahre } \mu = 3 \cdot \lambda^{3-1} = 3\lambda^2$$

$$\text{im 4ten Jahre } \mu = 4 \cdot \lambda^{4-1} = 4\lambda^3$$

u. s. f.

und jedes dieser verschiedenen μ wäre in dem darauf folgenden Jahre zu $\mu+1$, also jeder Theil 1 des Waldbestandes η nach Verfluß eines Jahres zu 2

$$\begin{array}{ccccccc} - & - & 2\lambda & - & - & {}^1\eta & - & - & - & - & 2\lambda+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & - & 3\lambda^2 & - & - & {}^2\eta & - & - & - & - & 3\lambda^2+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & - & 4\lambda^3 & - & - & {}^3\eta & - & - & - & - & 4\lambda^3+1 \end{array}$$

u. s. f.

$$\begin{array}{ccccccc} - & - & \nu\lambda^{\nu-1} & - & - & {}^{\nu-1}\eta & - & - & - & - & \nu\lambda^{\nu-1}+1 \end{array}$$

angewachsen. Daher entstehen folgende Proportions

$$1 : 2 = \eta : {}^1\eta$$

$$2\lambda : 2\lambda + 1 = {}^1\eta : {}^2\eta$$

$$3\lambda^2 : 3\lambda^2 + 1 = {}^2\eta : {}^3\eta$$

$$4\lambda^3 : 4\lambda^3 + 1 = {}^3\eta : {}^4\eta$$

u. s. f.

$$\nu\lambda^{\nu-1} : \nu\lambda^{\nu-1} + 1 = {}^{\nu-1}\eta : {}^\nu\eta$$

und wenn man diese Proportions durch einander multiplicirt, so wird

$$1 \cdot 2\lambda \cdot 3 \cdot \lambda^2 \cdot 4 \cdot \lambda^3 \dots \nu\lambda^{\nu-1} : 2 \cdot (2\lambda + 1) \cdot (3\lambda^2 + 1) \cdot (4\lambda^3 + 1) \dots (\nu\lambda^{\nu-1} + 1) = \eta \cdot {}^1\eta \cdot {}^2\eta \dots {}^{\nu-1}\eta \cdot {}^\nu\eta$$

oder $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \nu) \cdot (\lambda \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^3 \cdot \lambda^4 \dots \lambda^{\nu-1}) : 2 \cdot (2\lambda + 1) \cdot (3\lambda^2 + 1) \cdot (4\lambda^3 + 1) \dots (\nu\lambda^{\nu-1} + 1) = \eta : {}^\nu\eta$

In dem ersten Gliede ist aber

$$\lambda \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^3 \cdot \lambda^4 \dots \lambda^{\nu-1} = \lambda^{1+2+3+4 \dots \nu-1}$$

Der Exponens hiervon ist eine arithmetische Progression, deren Summe gefunden wird, wenn man die halbe Anzahl ihrer Glieder $\frac{\nu-1}{2}$ durch die Summe des ersten und letzten Gliedes, nämlich durch $1 + (\nu-1) = \nu$ multiplicirt. Es ist also diese Summe $= \frac{(\nu-1) \cdot \nu}{2} = (\nu-1) \cdot \nu : 2$, folglich

$$\lambda \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^3 \cdot \lambda^4 \dots \lambda^{\nu-1} = \lambda^{(\nu-1) \cdot \nu : 2}$$

Bringt man nun diese Veränderung in obiger Proportion an, so wird

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \nu \cdot \lambda^{(\nu-1) \cdot \nu : 2} : 2 \cdot (2\lambda + 1) \cdot (3\lambda^2 + 1) \cdot (4\lambda^3 + 1) \dots (\nu\lambda^{\nu-1} + 1) = \eta : {}^\nu\eta$$

und hieraus entsteht

$${}^\nu\eta = \frac{2 \cdot (2\lambda + 1) \cdot (3\lambda^2 + 1) \cdot (4\lambda^3 + 1) \dots (\nu\lambda^{\nu-1} + 1) \cdot \eta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \nu \cdot \lambda^{(\nu-1) \cdot \nu : 2}}$$

7D.

Bey der Abnahme des obigen Gesetzes wird also vorausgesetzt, daß der zu einem jeden Alter von ν Jahren angewachsene Waldbestand diesem Werthe gleiche.

III. Wollte man das jährliche Wachsthum des Forstes nach der Formel $\mu = \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

prüfen, so wäre

$$\text{im ersten Jahre } \mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} = 1$$

$$\text{im zweyten Jahre } \mu = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} = 1 + \lambda$$

$$\text{im dritten Jahre } \mu = \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} = 1 + \lambda + \lambda^2$$

$$\text{im vierten Jahre } \mu = \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3$$

u. s. w.

welche Quotienten nach den gewöhnlichen Divisions Regeln der Buchstaben-Rechnung gefunden sind. Jedes dieser verschiedenen μ wäre also nach Verfluß des folgenden Jahres zu $\mu + 1$, also

jeder Theil 1 des Waldbest. η nach Verfl. d. folg. Jahres zu $1 + 1 = 2$

$$\begin{array}{llll} = -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} & - & {}^1\eta & - \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} + 1 = \frac{\lambda^2 - 1 + \lambda - 1}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^2 + \lambda - 2}{\lambda - 1} \\ = -\frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} & - & {}^2\eta & - \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} + 1 = \frac{\lambda^3 - 1 + \lambda - 1}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^3 + \lambda - 2}{\lambda - 1} \\ = -\frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} & - & {}^3\eta & - \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} + 1 = \frac{\lambda^4 - 1 + \lambda - 1}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^4 + \lambda - 2}{\lambda - 1} \\ & & \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} \quad \text{u. s. f.} \\ = -\frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} & - & {}^{v-1}\eta & - \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} + 1 = \frac{\lambda^v - 1 + \lambda - 1}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^v + \lambda - 2}{\lambda - 1} \end{array}$$

angewachsen, woraus sich folgende Proportions herleiten lassen

$$\begin{array}{l} 1 : 2 = \eta : {}^1\eta \\ \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} : \frac{\lambda^2 + \lambda - 2}{\lambda - 1} = {}^1\eta : {}^2\eta \\ \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} : \frac{\lambda^3 + \lambda - 2}{\lambda - 1} = {}^2\eta : {}^3\eta \\ \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} : \frac{\lambda^4 + \lambda - 2}{\lambda - 1} = {}^3\eta : {}^4\eta \quad \text{u. s. f.} \end{array}$$

$$\frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} : \frac{\lambda^v + \lambda - 2}{\lambda - 1} = {}^{v-1}\eta : {}^v\eta$$

Wenn man nun die Nenner $\lambda - 1$, die in den ersten und zweyten Gliedern dieser Proportions enthalten sind, gegeneinander aufhebt, und dann diese Proportions durch einander multiplicirt, so entsteht:

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^3 - 1)(\lambda^4 - 1) \dots (\lambda^v - 1) : 2(\lambda^2 + \lambda - 2)(\lambda^3 + \lambda - 2)(\lambda^4 + \lambda - 2) \dots (\lambda^v + \lambda - 2) = \eta : {}^v\eta$$

Hieraus folgt

$${}^v\eta = \frac{2 \cdot (\lambda^2 + \lambda - 2) \cdot (\lambda^3 + \lambda - 2) \cdot (\lambda^4 + \lambda - 2) \dots (\lambda^v + \lambda - 2) \cdot \eta}{(\lambda^2 - 1) \cdot (\lambda^3 - 1) \cdot (\lambda^4 - 1) \dots (\lambda^v - 1)}$$

E.

Man hat also nachzusehen, ob das vorgenommene Gehölz mit Verfluß jeden v ten Jahres seines Alters diesen Bestand erreicht.

IV. Sollte die Formel $\mu = \frac{\lambda^v - 1}{(\lambda - 1) \lambda^{v-1}}$ auf die Probe gestellt werden, so würde seyn

$$\text{im 1ten Jahre } \mu = \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 1) \lambda^{1-1}} = \frac{(\lambda - 1)}{(\lambda - 1) \lambda^0} = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} = 1$$

$$\text{im 2ten Jahre } \mu = \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda - 1) \lambda^{2-1}} = \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda - 1) \lambda} = \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} \right) : \lambda = (1 + \lambda) : \lambda$$

$$\text{im 3ten Jahre } \mu = \frac{\lambda^3 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^{3-1}} = \frac{\lambda^3 - 1}{(\lambda - 1) \lambda^2} = \left(\frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} \right) : \lambda^2 = (1 + \lambda + \lambda^2) : \lambda^2$$

$$\text{im 4ten Jahre } \mu = \frac{\lambda^4 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^{4-1}} = \frac{\lambda^4 - 1}{(\lambda - 1) \lambda^3} = \left(\frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} \right) : \lambda^3 = (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3) : \lambda^3$$

u. s. f.

und jeder Theil $\mu = \frac{\lambda^v - 1}{(\lambda - 1) \lambda^{v-1}}$ des nach $v - 1$ Jahren vorhandenen Waldbestandes

des ${}^{v-1}\eta$ würde nach Verfluß des darauf folgenden Jahres zu $\mu + 1 = \frac{\lambda^v - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^{v-1}} + 1$

$$= \frac{\lambda^v - 1 + (\lambda - 1) \cdot \lambda^{v-1}}{(\lambda - 1) \lambda^{v-1}} \text{ angewachsen seyn.}$$

Hieraus folgt

für $\nu = 1$, $\mu + 1 = 2$, weil oben $\mu = 1$ gefunden wurde;

$$\text{für } \nu = 2, \mu + 1 = \frac{2\lambda^2 - \lambda - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda}$$

$$\text{für } \nu = 3, \mu + 1 = \frac{2\lambda^3 - \lambda^2 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^2}$$

$$\text{für } \nu = 4, \mu + 1 = \frac{2\lambda^4 - \lambda^3 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^3}$$

u. s. f.

Demnach wäre

jeder Theil 1 des Waldbest. η nach Ablauf d. folg. Jahres zu 2

$$= \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda} \cdot {}^1\eta = \frac{2\lambda^2 - \lambda - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda}$$

$$= \frac{\lambda^3 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^2} \cdot {}^2\eta = \frac{2\lambda^3 - \lambda^2 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^2}$$

$$= \frac{\lambda^4 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^3} \cdot {}^3\eta = \frac{2\lambda^4 - \lambda^3 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^3}$$

u. s. f.

angewachsen, woraus folgende Proportions entstehen:

$$1 : 2 = \eta : {}^1\eta$$

$$\frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda} : \frac{2\lambda^2 - \lambda - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda} = {}^1\eta : {}^2\eta$$

$$\frac{\lambda^3 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^2} : \frac{2\lambda^3 - \lambda^2 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^2} = {}^2\eta : {}^3\eta$$

$$\frac{\lambda^4 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^3} : \frac{2\lambda^4 - \lambda^3 - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^3} = {}^3\eta : {}^4\eta$$

u. s. f.

$$\frac{\lambda^\nu - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^{\nu-1}} : \frac{2\lambda^\nu - \lambda^{\nu-1} - 1}{(\lambda - 1) \cdot \lambda^{\nu-1}} = {}^{\nu-1}\eta : {}^\nu\eta$$

Wenn man nun die in den beyden ersten Gliedern dieser Proportionen sich befindlichen gemeinschaftlichen Nenner gegen einander aufhebt, so wird

$$\begin{aligned} 1 : 2 &= \eta : {}^1\eta \\ \lambda^2 - 1 : 2\lambda^2 - \lambda - 1 &= {}^1\eta : {}^2\eta \\ \lambda^3 - 1 : 2\lambda^3 - \lambda^2 - 1 &= {}^2\eta : {}^3\eta \\ \lambda^4 - 1 : 2\lambda^4 - \lambda^3 - 1 &= {}^3\eta : {}^4\eta \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

$$\lambda^v - 1 : 2\lambda^v - \lambda^{v-1} - 1 = {}^{v-1}\eta : {}^v\eta$$

Diese Proportions durch einander multiplicirt, geben

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^3 - 1)(\lambda^4 - 1) \dots (\lambda^v - 1) : 2 \cdot (2\lambda^2 - \lambda - 1)(2\lambda^3 - \lambda^2 - 1)(2\lambda^4 - \lambda^3 - 1) \dots (2\lambda^v - \lambda^{v-1} - 1) = \eta : \eta^v \eta$$

$$\text{woraus } {}^v\eta = \frac{2 \cdot (2\lambda^2 - \lambda - 1) \cdot (2\lambda^3 - \lambda^2 - 1) \cdot (2\lambda^v - \lambda^3 - 1) \dots (2\lambda^v - \lambda^{v-1} - 1) \cdot \eta}{(\lambda^2 - 1) \cdot (\lambda^3 - 1) \cdot (\lambda^4 - 1) \dots (\lambda^v - 1)} \quad {}^vF,$$

entsteht. So groß müßte also bey durchgängig gefundener Richtigkeit obiger veränderlicher Verhältnisse $\mu:1$ der von der Zeit des Saamenaufgehens bis mit jedem v ten Jahre aufgewachsene Waldbestand seyn.

V. Würde aber $\mu = \frac{\lambda^v - 1}{\lambda + 1}$ die Probe aushalten, so würde auch befunden werden

$$\text{im 1ten Jahre } \mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

$$\text{im 2ten Jahre } \mu = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda + 1} = \lambda - 1$$

$$\begin{aligned} \text{im 3ten Jahre } \mu &= \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda + 1} = \frac{(\lambda^3 - 1) \cdot (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) (\lambda - 1)} = \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \\ &= (\lambda^2 + \lambda + 1) \cdot (\lambda - 1) : (\lambda + 1) \end{aligned}$$

$$\text{im 4ten Jahre } \mu = \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda + 1} = \frac{(\lambda^4 - 1) \cdot (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)}$$

$$= \frac{\lambda^4 - 1}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} \cdot (\lambda - 1) = \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^2 + 1} \cdot (\lambda - 1)$$

$$= (1 + \lambda^2) \cdot (\lambda - 1)$$

$$\text{im 5ten Jahre } \mu = \frac{\lambda^5 - 1}{\lambda + 1} = \frac{(\lambda^5 - 1) \cdot (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)} = \frac{\lambda^5 - 1}{\lambda - 1} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

$$= (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4) \cdot (\lambda - 1) : (\lambda + 1)$$

$$\text{im 6ten Jahre } \mu = \frac{\lambda^6 - 1}{\lambda + 1} = \frac{(\lambda^6 - 1) \cdot (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)}$$

$$= \frac{\lambda^6 - 1}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} \cdot (\lambda - 1) = \frac{\lambda^6 - 1}{\lambda^2 - 1} \cdot (\lambda - 1)$$

$$= (1 + \lambda^2 + \lambda^4) \cdot (\lambda - 1)$$

$$\text{im 7ten Jahre } \mu = \frac{\lambda^7 - 1}{\lambda + 1} = \frac{(\lambda^7 - 1) \cdot (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)} = \frac{(\lambda^7 - 1)}{\lambda - 1} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

$$= (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^5 + \lambda^6) \cdot (\lambda - 1) : (\lambda + 1)$$

$$\text{im 8ten Jahre } \mu = \frac{\lambda^8 - 1}{\lambda + 1} = \frac{(\lambda^8 - 1) \cdot (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)}$$

$$= \frac{\lambda^8 - 1}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)} \cdot (\lambda - 1) = \frac{\lambda^8 - 1}{\lambda^2 - 1} \cdot (\lambda - 1)$$

$$= (1 + \lambda^2 + \lambda^4 + \lambda^6) \cdot (\lambda - 1)$$

und jeder Theil $\mu = \frac{\lambda^v - 1}{\lambda + 1}$ des nach $v - 1$ Jahren vorhandenen Waldbestandes

$v - 1$ würde nach Verfluß des darauf folgenden Jahres zu $\mu + 1 = \frac{\lambda^v - 1}{\lambda + 1} + 1$

$$= \frac{\lambda^v - 1 + \lambda + 1}{\lambda + 1} = \frac{\lambda^v + \lambda}{\lambda + 1} = \frac{\lambda + 1}{\lambda^{v-1} + 1} \cdot \lambda \text{ angewachsen seyn.}$$

$$\text{Für } v = 1 \text{ wird daher } \mu + 1 = \frac{(\lambda^{1-1} + 1) \cdot \lambda}{\lambda + 1} = \frac{(\lambda^0 + 1) \cdot \lambda}{\lambda + 1}$$

$$= \frac{(1 + 1) \cdot \lambda}{\lambda + 1} = \frac{2}{\lambda + 1} \cdot \lambda$$

Für $\nu=2$ wird daher $\mu+1 = \frac{(\lambda^{2-1}+1) \cdot \lambda}{\lambda+1} = \frac{\lambda+1}{\lambda+1} \cdot \lambda$

- $\nu=3$ - - $\mu+1 = \frac{(\lambda^{3-1}+1) \cdot \lambda}{\lambda+1} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda+1} \cdot \lambda$

- $\nu=4$ - - $\mu+1 = \frac{(\lambda^{4-1}+1) \cdot \lambda}{\lambda+1} = \frac{\lambda^3+1}{\lambda+1} \cdot \lambda$

u. s. f.

Demnach wäre

jeder Theil $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ des Waldbest. η nach Verfl. d. darauf folg. Jahres zu $\frac{2}{\lambda+1} \cdot \lambda$

- $\frac{\lambda^2-1}{\lambda+1}$ - - $^1\eta$ - - - - $\frac{\lambda+1}{\lambda+1} \cdot \lambda$

- $\frac{\lambda^3-1}{\lambda+1}$ - - $^2\eta$ - - - - $\frac{\lambda^2+1}{\lambda+1} \cdot \lambda$

- $\frac{\lambda^4-1}{\lambda+1}$ - - $^3\eta$ - - - - $\frac{\lambda^3+1}{\lambda+1} \cdot \lambda$

u. s. f.

angewachsen. Hieraus entstehen folgende Proportions:

$$\frac{\lambda-1}{\lambda+1} : \frac{2}{\lambda+1} \cdot \lambda = \eta : ^1\eta$$

$$\frac{\lambda^2-1}{\lambda+1} : \frac{\lambda+1}{\lambda+1} \cdot \lambda = ^1\eta : ^2\eta$$

$$\frac{\lambda^3-1}{\lambda+1} : \frac{\lambda^2+1}{\lambda+1} \cdot \lambda = ^2\eta : ^3\eta$$

$$\frac{\lambda^4-1}{\lambda+1} : \frac{\lambda^3+1}{\lambda+1} \cdot \lambda = ^3\eta : ^4\eta$$

u. s. f.

$$\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda+1} : \frac{\lambda^{\nu-1}+1}{\lambda+1} \cdot \lambda = {}^{\nu-1}\eta : {}^\nu\eta$$

Wenn man hierinne die Nenner $\lambda + 1$, die in allen ersten und zweyten Gliedern vorkommen, gegeneinander aufhebt, und dann diese ν Proportions durcheinander multiplicirt, so wird

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot (\lambda^3 - 1) \cdot (\lambda^4 - 1) \dots (\lambda^\nu - 1) : 2 \cdot (\lambda + 1) (\lambda^2 + 1) (\lambda^3 + 1) \dots (\lambda^{\nu-1} + 1) \lambda^\nu = \eta : {}^\nu\eta$$

^{7G} und hieraus ${}^\nu\eta = \frac{2 \cdot (\lambda + 1) (\lambda^2 + 1) (\lambda^3 + 1) \dots (\lambda^{\nu-1} + 1) \lambda^\nu \cdot \eta}{(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 - 1) (\lambda^3 - 1) \dots (\lambda^\nu - 1)}$

So groß müßte also der Waldbestand nach jedem der ν Jahre befunden werden, wenn das Gesetz $\mu = \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda + 1}$ für richtig angenommen werden soll.

No. XXVI.

A n w e n d u n g e n.

[§. 39-
43.]

Erste Aufgabe.

Ein Waldbestand a werde nach h jähriger Schonung durch $n + 1$ jährliche Holzschläge, von gleichem Betrag, in den darauf folgenden n Jahren gänzlich abgetrieben. Ueberdies sey der jährliche Zuwachs für die $h + n$ Jahre, wie $m : 1$ bekannt. Man soll den Betrag g für jeden Holzschlag finden.

I. Auflösung.

1) Man findet durch die Formeln

$$g = \frac{Ea - T}{I - m} \quad ({}^3F)$$

$$g = \frac{10000 \cdot a - TA}{A \cdot (I - m)} \quad ({}^3G)$$

worinne die Werthe von A , E und I durch

$$\log. A = \log. 10000 - \nu \cdot [\log. (m + 1) - \log. m]$$

$$\log. E = \log. \nu \cdot [\log. (m + 1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m + 1) + (\nu - h) \cdot [\log. (m + 1) - \log. m]$$

zu bestimmen sind, wie groß der jährliche Holzschlag g gemacht werden kann, damit von einem vorgegebenen Waldbestande a , der nach dem Verhältnisse $m:1$ seinen jährlichen Zuwachs erhält; der die ersten h Jahre geschont, und dann jährlich mit einem Holzschlage von dem Betrage g angegriffen werden soll, nach v Jahren, also nach $v-h+1$ wiederholten Holzschlägen, noch ein Waldbestand T übrig verbleibe. Hiermit vergleiche man obige Aufgabe, so findet man ihre Auflösung durch jede der Formeln ^3F und ^3G , wenn man in sie $T=0$ und $v=h+n$ setzt. Wenn man also die Werthe von A , E und I durch

$$\log. A = \log. 10000 - (h+n) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = \log. (h+n) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m+1) + n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

berechnet hat, so findet man den gesuchten jährlichen Holzschlag

$$\text{entweder durch } g = \frac{Ea}{I-m}$$

$^7H.$

$$\text{oder durch } g = \frac{10000 \cdot a}{A \cdot (I-m)}$$

$^7I.$

2) Wenn ein Waldbestand a , der die ersten c Jahre in dem Verhältnisse $m:1$ und in den darauf folgenden Jahren, wie $p:1$, sein jährliches Wachsthum erhält, die ersten c Jahre seinem eigenen Wachstume überlassen und mit Holzschlägen verschont wird, nach Ablauf derselben aber jährlich mit einem Holzschlage, von gleichem Betrage, angegriffen werden soll, damit nach v Jahren ein Waldbestand T übrig verbleibe, so muß der jährliche Hau

$$g = \frac{Ea - T}{(p+1)F - p} \quad (^8O.)$$

$$\text{oder, welches einerley, } g = \frac{10000 \cdot a - TB}{(p+1) \cdot A - pB} \quad (^8P)$$

gemacht werden, in welchen Formeln die Werthe von A , B , E , F durch

$$\log. A = \log. 10000 - c \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. B = \log. A - v \cdot [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. F = \log. v \cdot [\log. (p+1) - \log. p]$$

$$\log. E = \log. F + c \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

bestimmt werden. Man halte dies mit obiger Aufgabe zusammen, so findet man sowohl durch ^3O als ^3P ihre Auflösung, wenn man $T=0$, $v=h+n$, $c=h$, und $m=p$ setzt. Es wird dann der gesuchte jährliche Holzschlag g

$$^7K. \quad \text{durch } g = \frac{Ea}{(m+1)F - m}$$

$$^7L. \quad \text{oder } g = \frac{10000 \cdot a}{(m+1)A - mB}$$

gefunden, worinne A , B , E und F durch

$$\log. A = \log. 10000 - h \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. B = \log. A - (h+n) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. F = \log. (h+n) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = \log. F + h \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

zu berechnen sind.

II. Auflösung obiger Aufgabe für $h=0$

1) Man setze $h=0$ in die Logarithmen von A , E und I , welche zu den Formeln ^7H ^7I gehören, so findet man den gesuchten Holzschlag g

$$^7M. \quad \text{entweder durch } g = \frac{Ea}{I - m}$$

$$^7N. \quad \text{oder durch } g = \frac{10000 \cdot a}{A \cdot (I - m)}$$

wenn man die Werthe von A , E und I durch

$$\log. A = \log. 10000 - n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = \log. n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m+1) + n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

vorher berechnet hat.

2) Oder man setze $h=0$ in die Logarithmen von A , B , F und E , welche den Formeln ^7K und ^7L zugehören, so findet man

$$\log. A = \log. 10000$$

$$\log. B = \log. A - n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. F = n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = \log. F$$

Hier ist also $A = 10000$ und $E = F$. Dies setze man in die Formeln ${}^1K$ und ${}^1L$, so findet man den gesuchten jährlichen Hau g

$$\text{durch } g = \frac{Ea}{(m+1)E - m} \quad {}^7O.$$

$$\text{oder } g = \frac{10000 \cdot a}{10000 \cdot (m+1) - mB} \quad {}^7P.$$

worin noch vorher B und F durch

$$\log. B = \log. 10000 - n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\text{und } \log. E = n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

zu bestimmen ist, wie aus obigen vier Logarithmen erhellet.

Anmerk. Zu den Formeln ${}^7O$ und ${}^7P$ gelangt man durch die Formeln ${}^3B$ und ${}^3C$, wenn man in sie, wie es die Aufgabe erfordert, $T=0$ setzt. Unter allen diesen vier Formeln ist ${}^7O$ für die Berechnung am bequemsten.

III. Auflösung obiger Aufgabe für $h = 1$

1) Sollte von dem Waldbestande a , bey einjähriger Schonung, nach v Jahren ein Waldbestand T übrig bleiben, so fände man den jährlichen Holzschlag

$$\text{durch } g = \frac{Ea - T}{m \cdot (E - 1)} \quad ({}^3D)$$

$$\text{oder durch } g = \frac{10000 \cdot a - TA}{m \cdot (10000 - A)} \quad ({}^3E)$$

worin E und A durch

$$\log. A = \log. 10000 - v \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = v \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

zu bestimmen sind.

Hierein setze man wegen den Bedingungen der Aufgabe $T=0$ und $v=n+1$, so findet man den gesuchten Werth von g

$$^7Q. \quad \text{durch } g = \frac{Ea}{m \cdot (E-1)}$$

$$^7R. \quad \text{oder durch } g = \frac{10000 - A}{m \cdot (10000 - A)}$$

worinne A und E durch

$$\log. A = \log. 10000 - (n+1) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = \log. (n+1) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

zu bestimmen sind.

2) Man setze $h=1$ in die Logarithmen von A , E und I , welche den Formeln ^7H und ^7I zugehören, so wird der gesuchte Holzschlag g

$$^7S. \quad \text{durch } g = \frac{Ea}{I - m}$$

$$^7T. \quad \text{oder durch } g = \frac{10000 \cdot a}{A \cdot (I - m)}$$

bekannt, worinne man zuvor die Werthe von A , E und I durch

$$\log. A = \log. 10000 - (n+1) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = (n+1) \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m+1) + n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

zu berechnen hat.

3) Oder, man setze $h=1$ in die Logarithmen von A , B , F und E , welche den Formeln ^7K und ^7L zugehören, so findet man den gesuchten jährlichen Haug durch

$$^7U. \quad g = \frac{Ea}{(m+1)F - m}$$

$$^7V. \quad \text{oder } g = \frac{10000 \cdot a}{(m+1)A - mB}$$

Wenn man vorher die Werthe von A, B, E und F durch

$$\begin{aligned}\log. A &= \log. 10000 - 1 \cdot [\log. (m+1) - \log. m] \\ \text{oder} \quad \log. A &= \log. 1000 + \log. m - \log. (m+1) \\ \text{ferner} \quad \log. B &= \log. A - (n+1) \cdot [\log. (m+1) - \log. m] \\ \log. F &= (n+1) \cdot [\log. (m+1) - \log. m] \\ \log. E &= \log. F + \log. (m+1) - \log. m\end{aligned}$$

berechnet.

Anmerk. Unter diesen sechs Formeln sind die beyden ersten ⁷Q und ⁷R am leichtesten zu berechnen.

IV. Auflösung obiger Aufgabe für $n=0$, d. h. wenn der Waldbestand nach Ablauf der h Jahre durch einen einzigen Holzschlag abgetrieben werden soll.

1) Man setze $n=0$ in der Formel ⁸A zugehörigen Logarithmen von E und I, so wird

$$\log. E = h \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m+1) \text{ also } I = (m+1)$$

Dies in ⁷H gesetzt, giebt den gesuchten Holzschlag

$$g = \frac{Ea}{m+1-m} = Ea$$

⁷W.

und eben dieser Betrag g ist es, bis auf welchen ein Waldbestand a in h Jahren durch eigenen, ungestörten Zuwachs, der sich jährlich zu dem geschonten Waldbestande wie $1:m$ verhält, ansteigt. (Siehe No. XVII. in V.)

2) Will man aber die Anzahl h der Jahre wissen, in welchen a den Betrag g durch eigenen, ungestörten Zuwachs erreichen wird, so folgt aus ⁷W, $E = \frac{g}{a}$.

Diesen Werth von E setze man in $\log. E = h [\log. (m+1) - \log. m]$ so wird $\log. \frac{g}{a}$

oder

$$\log. g - \log. a = h \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\text{und hieraus } h = \frac{\log. g - \log. a}{\log. (m+1) - \log. m}$$

⁷X.

Zweyte Aufgabe.

Man weiß, daß jede m Klaftern eines vorgegebenen Waldbestandes von a Klaftern jährlich 1 Klafter Zuwachs geben. Es soll untersucht werden, wie lange dieser Forst geschont werden müsse, damit er erst nach Verfluß von c Jahren durch einen jährlich zu fallenden Holzschlag von g Klaftern ganz abgeholzet sey.

Auflösung.

Sollte der gegebene Forst von a Klaftern bey den Bedingungen der Aufgabe nach v Jahren noch eine Größe von T Klaftern besitzen, so müßte er

$$z = \frac{\log. g + \log. (m+1) + \log. E - \log. [Ea + mg - T]}{\log. (m+1) - \log. m} \quad (4Z. VI)$$

Jahre mit Holzschlägen verschont werden, in welcher Formel der Werth von E durch

$$\log. E = v [\log. (m+1) - \log. m]$$

zu berechnen ist; Nach der Aufgabe soll aber der Forst nach Ablauf von c Jahren abgeholzet seyn. Man setze daher in diese Formel $v=c$, und $T=0$. Hierdurch werde z zu h , so ist die gesuchte Anzahl Jahre der Schonung

$$h = \frac{\log. g + \log. (m+1) + \log. E - \log. [Ea + mg]}{\log. (m+1) - \log. m} \quad (7T.)$$

worinne der Werth von E durch

$$\log. E = c. [\log. (m+1) - \log. m]$$

berechnet wird.

Dritte Aufgabe.

Ein Waldbestand a erhält sein jährliches Wachsthum in dem Verhältnisse, wie $m:1$. Man sucht, wie lange derselbe ausreichen werde, wenn er h Jahre geschont, und dann jährlich mit einem Holzschlage von dem Betrage g angegriffen werden soll.

I. Auflösung.

Ein Waldbestand a , der in den ersten c Jahren, wie $m:1$, und in den darauf folgenden, wie $p:1$, seinen jährlichen Zuwachs erhält, und die ersten c Jahre mit Holzschlägen verschont bleibt, wird in den darauf folgenden

$$d' = \frac{\log. p + \log. A - \log. [(p+1)A - 10000 \cdot a : g]}{\log. (p+1) - \log. p} \quad (10.$$

Jahren (worin der Werth von A durch $\log. A = \log. 10000 - c[\log. (m+1) - \log. m]$ zu bestimmen ist), in welchen er jährlich mit einem Holzschlage von dem Betrage g , angegriffen wird, durch $d'+1$ wiederholte Holzschläge gänzlich abgetrieben seyn. Hiermit vergleiche man obige Aufgabe, und setze $m = q$, und $c = h$, wodurch d' zu n werde, so ergiebt sich die gesuchte Anzahl Jahre des Holzschlags, nämlich

$$n = \frac{\log. m + \log. A - \log. [(m+1)A - 10000 \cdot a : g]}{\log. (m+1) - \log. m} \quad 12.$$

worin A durch

$$\log. A = \log. 10000 - h \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

zu berechnen ist. Es wird also der gegebene Waldbestand a nach $h+n$ Jahren gänzlich abgeholzet seyn.

II. Auflösung für $h=0$.

Man setze n statt c' in die Formel $12N$, so findet man, daß der gegebene Forst nach Ablauf von

$$n = \frac{\log. m - \log. [(m+1) - a : g]}{\log. (m+1) - \log. m} \quad 12A.$$

Jahren wird abgeholzet seyn. Eben diese Formel erhält man auch durch die Formel $12Z$, wenn man in sie $h=0$ setzt.

III. Auflösung für $h=1$.

1) Man setze $h=1$ in den

$$\log. A = \log. 10000 - h \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

welcher der Formel $12N$ zugehört, so wird

$$\log. A = \log. 10000 + \log. m - \log. (m+1)$$

Q

Hieraus berechne man den Werth von A, und substituire denselben und den $\log. A$ in die Formel ^7N , so wird

$$n = \frac{\log. m + [\log. 10000 + \log. m - \log. (m+1)] - \log. [(m+1)A - 10000.a:g]}{\log. (m+1) - \log. m}$$

$$^8B. \text{ oder } n = \frac{\log. 10000 + 2.\log. m - \log. [(m+1)A - 10000.a:g]}{\log. (m+1) - \log. m}$$

2) Zu einer noch bequemern Auflösung gelangt man in diesem Falle durch die Formel ^5S , in welcher c' hier die Bedeutung von n hat. Man findet nämlich

$$^8C. \quad n = \frac{\log. m - \log. (m - a:g)}{\log. (m+1) - \log. m}$$

Vierte Aufgabe.

Ein Waldbestand a , von dem ein jeder Theil in dem Laufe der $h+n$ Jahre sich zu seinem jährlichen Zuwachse, wie $m:1$ verhält, soll nach genommenem Anstand von h Jahren durch $n+1$ jährliche Holzschläge, von dem Betrage g , in den darauf folgenden n Jahren angegriffen werden. Es soll untersucht werden, was für ein Waldbestand T nach Ablauf der $h+n$ Jahre übrig verbleibt.

I. Auflösung.

Man setze $h+n=v$ in die Formeln ^2A und ^2B , so findet man den gesuchten Waldbestand

$$^8D. \quad \text{entweder aus } T = 10000.a:A - Ig + mg$$

$$^8E. \quad \text{oder aus } T = Ea - Ig + mg$$

worinne A , E und I durch

$$\log. A = \log. 10000 - (h+n).[\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = \log. (h+n).[\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m+1) + n.[\log. (m+1) - \log. m]$$

bestimmt werden.

II. Auflösung für $h = 0$.

In diesem Falle findet man die Auflösung durch die Formeln ¹W, ¹X, wenn man nur n statt v setzt. Man findet nämlich

$$T = 10000 \cdot [a - (m+1)g] : A + mg$$

$$\text{oder } T = [a - (m+1)g] \cdot E + mg$$

worin die Werth von A und E durch

$$\log. A = \log. 10000 - n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. E = n \cdot [\log. (m+1) - \log. m]$$

berechnet werden.

Man findet auch den gesuchten Waldbestand in diesem Falle durch die Formeln ⁸D und ⁸E, wenn man sie $h=0$ setzt, die aber nicht so leicht zu berechnen sind, als die Formeln ⁸F und ⁸G.

Fünfte Aufgabe.

Ein Waldbestand a ist h Jahre hindurch seinem eigenen Wachsthum überlassen und mit Holzschlägen verschont, und nach Verfluß derselben durch einen einzigen Holzschlag, welcher g Klaftern enthielt, gänzlich abgetrieben worden. Man sucht das unbekannte Verhältniß $m:1$, wornach sich der Waldbestand a jährlich gemehrt hat.

Auflösung.

Wenn man den Weg verfolgt, auf welchem die Formeln ⁶O bis ⁷B gefunden worden sind, so wird man leicht gewahr, daß man in sie, statt der Zahl 1000, auch jede andere beliebige Zahl, als auch 1 setzen kann. Man setze daher in die Formel ⁶S 1 statt 1000, überdies m statt 1, g statt T und h statt f , so findet man

$$m = 1 : (N - 1)$$

wenn man zuvor den Werth von N durch

$$\log. N = \log. 1 + [\log. g - \log. a] : h$$

oder, weil $\log. 1 = 0$, durch

$$\log. N = \frac{1}{h} \cdot [\log. g - \log. a]$$

berechnet hat.

⁸H.

Erstes Beyspiel in Zahlen.

Es sey in der ersten Aufgabe $h=0$, $n=124$, $a=40000$, $m=66\frac{2}{3}=\frac{200}{3}$ gegeben. Man sucht g .

I. Auflösung.

Hr. v. O. bestimmt hier den jährlich zu fallenden Holzschlag durch die Formel

$$g = Ea : (I - m) \quad (M.$$

worinne E und I durch

$$\log. E = n. [\log. (m+1) - \log. m]$$

$$\log. I = \log. (m+1) + n. [\log. (m+1) - \log. m]$$

gefunden werden.

Nun rechne man nach dieser Formel auf folgende Art: Man suche erst E . Es ist nach den Angaben des Beyspiels

$$\log. (m+1) = \log. \left(\frac{200}{3} + 1 \right) = \log. \frac{203}{3} = \log. 203 - \log. 3$$

$$\log. m = \frac{200}{3} \dots \dots = \log. 200 - \log. 3$$

Man ziehe $\log. m$ von $\log. (m+1)$ ab, so hebt sich $\log. 3$ weg, und es bleibt

$$\log. (m+1) - \log. m = \log. 203 - \log. 200$$

$$= 2,3074960 - 2,3010300$$

$$= 0,0064660$$

$$\text{also } \log. E = n. [\log. (m+1) - \log. m] = 124,0,0064660$$

$$\text{oder } \log. E = 0,8017840$$

Nun findet man in den Tafeln $3,8017\dots = \log. 6335$, folglich $0,8017 = \log. 6,335$.

Daher ist $6,335 = E$.

Man suche ferner I:

$$\begin{aligned}\text{Es ist, wie oben, } \log.(m+1) &= \log.203 - \log.3 \\ &= 2,3074960 - 0,4771213 \\ &= 1,8303747.\end{aligned}$$

Oben wurde gefunden $n[\log.(m+1) - \log.m] = 0,8017840$

Daher entsteht durch die Addition $\log.I = 2,6321587$.

Nun findet man in den Tafeln $3,63215... = \log.4287$, also $2,63215... = \log.428,7$

Daher ist $4,287 = I$.

Nun suche man g durch obige Formel ^7M :

Da $E = 6,335$ und $a = 40000$, so ist $Ea = 6,335 \cdot 40000 = 253400$. Ferner, da $I = 428,7$

und $m = \frac{200}{3} = 66,6$, so ist $I - m = 362,1$; folglich

$$g = Ea : (I - m) = 253400 : 362 = 700 \text{ Klaftern.}$$

2te Auflösung.

Durch Berechnung der Formel

$$g = \frac{Ea}{(m+1)E - m} \quad (70).$$

Worin E durch $\log.E = n \cdot [\log.(m+1) - \log.m]$, wie in voriger Auflösung bestimmt wird, gelangt man noch eher zum Ziel. Denn nachdem man den Werth von $E = 6,335$ gefunden, so wird $Ea = 253400$.

$$\text{Ferner wird } (m+1)E = \left(\frac{200}{3} + 1\right) \cdot 6,335 = \frac{1286005}{3}; m = \frac{200}{3}$$

$$\text{folglich } (m+1)E - m = \frac{1286005 - 200}{3} = 362$$

$$\text{also } g = Ea : [(m+1)E - m] = 253400 : 362 = 700 \text{ Klaftern.}$$

Zweytes Beyspiel in Zahlen.

Es sey in der dritten Aufgabe $a = 40000$, $g = 700$ und $m = 66\frac{2}{3} = \frac{200}{3}$ gegeben. Man sucht n.

Auflösung.

Man rechne nach der Formel

$$n = \frac{\log. m - \log. [(m+1) - a:g]}{\log. (m+1) - \log. m} \quad (A)$$

Nach den Angaben des Beyspiels ist $m+1 = \frac{200}{3} + 1 = \frac{203}{3}$, $a:g =$

$$\frac{40000}{700} = \frac{400}{7}, \text{ also } m+1 - a:g = \frac{203}{3} - \frac{400}{7} = \frac{221}{21}. \text{ Daher ist}$$

$$\log. [m+1 - a:g] = \log. \frac{221}{21} = \log. 221 - \log. 21$$

$$= 2,3443923 - 1,3222193$$

$$= 1,0221730$$

$$\text{und } \log. m = \log. \frac{200}{3} = \log. 200 - \log. 3$$

$$= 2,3010300 - 0,4771213$$

$$= 1,8239087$$

$$\text{und } \log. (m+1) = 1,8303747 \quad (\text{aus vorig. Aufl.})$$

Nun substituirt man die gefundenen Werthe von $\log. m$, $\log. (m+1)$ und $\log. [m+1 - a:g]$ in obige Formel A , so findet man

$$n = \frac{1,8239087 - 1,0221730}{1,8303747 - 1,8239087} = 124 \text{ Jahre.}$$

No. XXVII.

[§.44.] Wenn jede m Thaler eines Capitals jährlich einen Thaler Interesse geben, so

ist das Capital zu $\frac{100}{m}$ pro Cent ausgeliehen. Denn es ist m Thaler Capit. : 1 Thl.

Interesse = 100 Thl. Cap. : $\frac{100}{m}$ Thaler Int.

No. XXVIII.

Erste Aufgabe.

Man hat ein Capital a zu $\frac{100}{m}$ pro Cent auf Interessen gelegt, so daß der [§.45.] jährlich gefällige Zins sogleich wieder zum Capital geschlagen werde, und verlangt zu wissen, bis zu welcher Grösse (b) dies Capital nach Ablauf von h Jahren angewachsen seyn wird.

Auflösung.

Man vergleiche diese Aufgabe mit derjenigen, zu welcher die Formel ^7W die Auflösung gab, so findet man, wegen der Aehnlichkeit beyder Aufgaben, wenn man b statt g in die Formel ^7W setzt

$$b = Ea$$

wenn man zuvor den Werth von E durch

$$\log. E = h, [\log. (m+1) - \log. m]$$

berechnet hat.

^{8I.}

Zweyte Aufgabe.

Für eine in h Jahren zahlbare Geldsumme b will man gegenwärtig einen noch unbekannten Geldbetrag a in Empfang nehmen. Leihet man nun diesen zu $\frac{100}{m}$ pro Cent aus, und schlägt die Interessen nach Ablauf eines jeden Jahres zum Capital, bis das Capital a nach h Jahren wieder zu dem Capital b angewachsen ist, so fragt sich, wie groß das Capital a seyn müsse, das man gegenwärtig in Empfang nimmt?

Auflösung.

Man suche aus der Formel ^8I die Grösse a , so findet man das gesuchte Capital

$$a = b : E$$

^{8K.}

wenn man zuvor den Werth von E durch

$$\log. E = h, [\log. (m+1) - \log. m]$$

berechnet.

Dritte Aufgabe.

Es will jemand ein Capital zu $100 : \xi$ pro Cent, Zins auf Zins gerechnet, jährlich nutzen, und es mit solcher Absicht zur Erkaufung eines Waldbestandes anlegen, welcher erst in h Jahren schlagbar seyn, und zu eben derselben künftigen Zeit den Werth an Gelde b erreichen wird. Man verlangt den Kaufpreis zu wissen, um welchen er diesen Waldbestand, der ihm erst in h Jahren zum Nutzen kommt, gegenwärtig, ohne Schaden und ohne Vorthail, zum Voraus an sich bringen kann.

Auflösung.

Man setze ξ statt m in die Formel ${}^sK$, so findet man den gesuchten Kaufpreis

 ${}^sL$.

$$a = b : E$$

wenn man E durch $\log. E = h \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi]$ vorher berechnet hat.

Andere Auflösung.

Aus der Formel $a = b : E$ [${}^sL$]

folgt $\log. a = \log. b - \log. E$

und da $\log. E = h \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi]$

so wird $\log. a = \log. b - h \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi]$.

Nun sey $\log. g = \log. (\xi + 1) - \log. \xi$

 ${}^sM$.

so wird $\log. a = \log. b - h \cdot \log. g$

Wenn man hiernach die Logarithmen von g und a berechnet hat, so findet man in den Tafeln die dem Logarithmen von a zugehörige Zahl a , die der gesuchte Kaufpreis ist.

No. XXIX.

[§. 46]

Ein Capitalist benutzt seine Gelder, und alle jährlich gefälligen Zinsen jährlich zu $100 : \xi$ pro Cent. Es findet sich eine Gelegenheit zur Ankaufung eines Forstes, der nicht nur in h Jahren, sondern auch nach Verfluß derselben aller w Jahre, das ist, in h , in $h + w$, in $h + 2w$, in $h + 3w$ Jahren, u. s. w. von einem

Zeitpunkte an gerechnet, einen Waldbestand, von einem Alter, in dem er am nutzbarsten gefällt wird, jedesmahl von neuem erreicht, und solchergestalt mit jedesmahligen Zwischenräume von w Jahren eine Holznutzung abwirft, die an Gelde dem Werthe von b Thalern gleich zu rechnen ist. Dieser Capitalist verlangt zu wissen, um welchen Kaufpreiss er alle diese künftigen Holznutzungen dieses Forstes, ohne Vorthail und ohne Schaden, jezt an sich bringen kann?

Auflösung.

Es seyen C, D, E, F, G u. s. f. die jetzigen Kaufpreisse der nach $h, h + w, h + 2w, h + 3w, h + 4w$ u. s. f. Jahren schlagbaren Waldbestände, von denen jeder zur Zeit seiner Fällung b Thaler werth ist, so findet man jeden dieser unbekannten Kaufpreisse durch die Formel⁸ M , wenn man in sie nach und nach C, D, E, F, G u. s. f. statt a , und in eben der Ordnung $h, h + w, h + 2w, h + 3w, h + 4w$ u. s. f. statt h setzt. Hierdurch gelangt man zu folgenden Formeln:

$$\log. g = \log. (\xi + 1) - \log. \xi$$

$$\log. C = \log. b - h \cdot \log. g$$

$$\begin{aligned} \log. D &= \log. b - (h + w) \cdot \log. g \\ &= \log. b - h \log. g - w \log. g \\ &= \log. C - w \cdot \log. g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. E &= \log. b - (h + 2w) \cdot \log. g \\ &= \log. b - (h + w) \cdot \log. g - w \log. g \\ &= \log. D - w \log. g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. F &= \log. b - (h + 3w) \cdot \log. g \\ &= \log. b - (h + 2w) \cdot \log. g - w \log. g \\ &= \log. E - w \cdot \log. g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. G &= \log. b - (h + 4w) \log. g \\ &= \log. b - (h + 3w) \log. g - w \log. g \\ &= \log. F - w \cdot \log. g \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

worausman die einzelnen Kaufpreisse C, D, E, F u. s. f. sehr leicht bestimmen kann. Die Summe derselben ist der gesuchte Kaufpreiss, den wir Σ nennen wollen, und nun auf folgende Art finden werden. Wenn man in den 5 letzten Formeln die Logarithmen aufhebt, so wird

$$C = \frac{b}{g^h}, D = \frac{b}{g^{h+w}}, E = \frac{b}{g^{h+2w}}, F = \frac{b}{g^{h+3w}} \text{ u. s. f. bis ins unendliche.}$$

Hiervon ist die Summe

$$\Sigma = \frac{b}{g^h} + \frac{b}{g^{h+w}} + \frac{b}{g^{h+2w}} + \frac{b}{g^{h+3w}} + \dots$$

$$\text{oder } \Sigma = \frac{b}{g^h} \cdot \left[1 + \frac{1}{g^w} + \frac{1}{g^{2w}} + \frac{1}{g^{3w}} + \dots \right]$$

Wenn man nun die Gröſſe g^w durch $g^w - 1$ nach den Regeln der Buchstabenrechnung dividirt, so findet man

$$\frac{g^w}{g^w - 1} = 1 + \frac{1}{g^w} + \frac{1}{g^{2w}} + \frac{1}{g^{3w}} + \dots$$

$$\text{Daher ist } \Sigma = \frac{b}{g^h} \cdot \frac{g^w}{g^w - 1}$$

$$\text{oder } \Sigma = b \cdot \frac{g^{w-h}}{g^w - 1}$$

Man setze hierin $g^{w-h} = M$ und $g^w = N$, so wird

$$\log. M = (w-h) \cdot \log. g$$

$$\log. N = w \cdot \log. g$$

$$\text{und da } \log. g = \log. (\xi + 1) - \log. \xi$$

$$\text{so wird } \log. M = (w-h) \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi]$$

$$\text{und } \log. N = w \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi]$$

Hat man aus diesen beyden Formeln den Werth von M und N bestimmt; so findet man den gesuchten Kaufpreis

¹N.

$$\Sigma = M : b : (N - 1)$$

Anmerkung.

[§. 47.] 1) Wenn in voriger Aufgabe $h = w$ ist, so wird $h - w = 0$, daher $\log.$

$M = 0$, $[\log. (\xi + 1) - \log. \xi] = 0$ also $M = 1$ und also der gesuchte Kaufpreis

²O.

$$\Sigma = b : (N - 1)$$

woraus man Σ findet, wenn man zuvor N , wie vorhin, durch

$$\log. N = w \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi]$$

berechnet.

2) Wenn $h=0$, so ist

$$\log. M = w \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi] = \log. N$$

also $M=N$, daher wird der gesuchte Kaufpreiſs

$$\Sigma = N \cdot b : (N-1)$$

gefunden, wenn man zuvor N durch

$$\log. N = w \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi]$$

bestimmt hat.

3) Wenn $h=w=1$ und $b=g$, so wird

$$\log. N = (\xi + 1) - \log. \xi; \text{ also } N = \frac{\xi + 1}{\xi}$$

$$\text{und } N - 1 = \frac{\xi + 1}{\xi} - 1 = \frac{\xi + 1 - \xi}{\xi} = \frac{1}{\xi}$$

Diesen Werth von $N-1$ setze man in die Formel ⁸O, so findet man für diesen Fall den gesuchten Kaufpreiſs

$$\Sigma = g : \frac{1}{\xi} = \xi \cdot g$$

No. XXX.

Es ist jemand gesonnen einen Forst anzukaufen, die darzu anzulegende Kauf-[§.48.] summe, mit den davon zu rechnenden jährlichen Zinsen, zu 100: ξ pro Cent zu nutzen. Wäre nun der Forst von der Beschaffenheit, daß seine wirthschaftliche Benutzung erforderte, ihn h Jahre hindurch zu schonen, hierauf selbigen mit $n+1$ jährlich erfolgenden Holzschlägen, in n Jahren, gänzlich abzutreiben, ihn hierauf wieder w Jahre hindurch unbenutzt zu lassen, sodann wiederum mit $n+1$ jährlichen Holzschlägen abzuholzen, nochmals w Jahre zu schonen, und mit solcher abwechselnden Abholzung und Schonung auf diese Art immerwährend fortzufahren, daß der Geldnutzungsbetrag eines jeden dieser künftig erfolgenden Holzschläge = g ge-

rechnet werden kann, so fragt sich, wie groß die für diesen Forst jetzt zu erlegenden Kaufsumme Σ seyn müsse?

Auflösung.

Es seyen $a, {}^1a, {}^2a, {}^3a, {}^4a$, u. s. f. ${}^na$ die jetzigen Kaufpreise der nach $h, h+1, h+2, h+3, h+4$ u. s. f. $h+n$ Jahren zu fällenden Holzschläge, deren jeder zur Zeit seiner Fällung einen Werth von g Thalern hat. Diese Kaufpreise werden durch die Formel ${}^8M$ bekannt, wenn man in sie nach und nach $a, {}^1a, {}^2a, {}^3a$, u. s. f. statt a , und $h, h+1, h+2, h+3$, u. s. f. statt h , desgleichen g statt b setzt. Hierdurch erhält man nämlich:

$$\begin{aligned}\log. a &= \log. g - h \cdot \log. g \\ \log. {}^1a &= \log. g - (h+1) \cdot \log. g \\ \log. {}^2a &= \log. g - (h+2) \cdot \log. g \\ \log. {}^3a &= \log. g - (h+3) \cdot \log. g \\ &\text{u. s. f.} \\ \log. {}^na &= \log. g - (h+n) \cdot \log. g\end{aligned}$$

In diesen Formeln ist, wie in No. XXVIII.

$$\log. g = \log. (\xi+1) - \log. \xi$$

und wenn man in ihnen die Logarithmen aufhebt, so wird

$$a = \frac{g}{g^h}, {}^1a = \frac{g}{g^{h+1}}, {}^2a = \frac{g}{g^{h+2}}, {}^3a = \frac{g}{g^{h+3}} \text{ u. s. f. } {}^na = \frac{g}{g^{h+n}}$$

Nun sey s der Kaufpreis dieser ersten $n+1$ Holzschläge, nämlich

$$s = a + {}^1a + {}^2a + {}^3a + \dots + {}^na$$

so wird
$$s = \frac{g}{g^h} + \frac{g}{g^{h+1}} + \frac{g}{g^{h+2}} + \frac{g}{g^{h+3}} + \dots + \frac{g}{g^{h+n}}$$

oder
$$s = \frac{g}{g^h} \cdot \left[1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots + \frac{1}{g^n} \right]$$

Nun findet man durch die Division g durch $g-1$, dafs

$$\frac{g}{g-1} = 1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots + \frac{1}{g^n} = \frac{g}{g-1} - \frac{\frac{1}{g^n}}{g-1}$$

Daher wird

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots + \frac{1}{g^n} &= \frac{g}{g-1} - \frac{\frac{1}{g^n}}{g-1} \\
 &= \frac{g - \frac{1}{g^n}}{g-1} \\
 &= \frac{g^n \cdot \left(g - \frac{1}{g^n} \right)}{g^n \cdot (g-1)} \\
 &= \frac{g^{n+1} - 1}{g^n \cdot (g-1)}
 \end{aligned}$$

Die hier gefundene Summe dieser Reihe setze man nun in letzte Formel von s , so wird

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{g}{g^h} \cdot \frac{g^{n+1} - 1}{g^n \cdot (g-1)} \\
 \text{oder } s &= \frac{g}{g^{h+n}} \cdot \frac{g^{n+1} - 1}{g-1}
 \end{aligned}$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe nehmen nun die ersten $n+1$ Holzschläge ihren Anfang nach h Jahren, die zweyten $n+1$ Holzschläge nach $h+n+w$ Jahren, die dritten $n+1$ Holzschläge nach $h+n+w+n+w = h+2 \cdot (n+w)$ Jahren, die vierten $n+1$ Holzschläge nach $h+n+w+n+w+n+w = h+3 \cdot (n+w)$ Jahren u. s. f. mit den übrigen Holzschlägen. Wenn daher ^2s , ^3s , ^4s , ^5s , u. s. f. die jetzigen Kaufpreise aller zweyten, dritten, vierten, fünften, u. s. f. $(n+1)$ Holzschläge bedeuten, so werden dieselben durch die Formel

$$s = \frac{g}{g^{h+n}} \cdot \frac{g^{n+1} - 1}{g-1}$$

bekannt, wenn man in sie nach und nach $h+n+w$, $h+2 \cdot (n+w)$, $h+3 \cdot (n+w)$, $h+4 \cdot (n+w)$ u. s. f. statt h , und ^2s , ^3s , ^4s , u. s. f. statt s setzt. Diesemnach findet man

$$^2s = \frac{g}{g^{h+n+n+w}} \cdot \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1}$$

$$^3s = \frac{g}{g^{h+n+2 \cdot (n+w)}} \cdot \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1}$$

$$^4s = \frac{g}{g^{h+n+3 \cdot (n+w)}} \cdot \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1}$$

$$^5s = \frac{g}{g^{h+n+4 \cdot (n+w)}} \cdot \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1}$$

u. s. f. bis ins Unendliche.

Da nun die gesuchte Kaufsumme Σ die Summe von den einzelnen Kaufpreisen $s, ^2s, ^3s, ^4s, ^5s$ u. s. f. bis ins Unendliche ist, so wird

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1} \cdot \left[\frac{1}{g^{h+n+(n+w)}} + \frac{1}{g^{h+n+2 \cdot (n+w)}} + \frac{1}{g^{h+n+3 \cdot (n+w)}} + \dots \right] \cdot g \\ &= \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1} \cdot \left[\frac{1}{g^{h+n}} \cdot \frac{1}{g^{n+w}} + \frac{1}{g^{h+n}} \cdot \frac{1}{g^{2(n+w)}} + \frac{1}{g^{h+n}} \cdot \frac{1}{g^{3(n+w)}} + \dots \right] \cdot g \\ &= \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1} \cdot \frac{1}{g^{h+n}} \cdot \left[\frac{1}{g^{n+w}} + \frac{1}{g^{2 \cdot (n+w)}} + \frac{1}{g^{3 \cdot (n+w)}} + \frac{1}{g^{4 \cdot (n+w)}} + \dots \right] \cdot g \end{aligned}$$

Die hier in dieser Parenthese befindliche unendliche Reihe ist aber der Quotient, der durch die Division von g^{n+w} durch $g^{n+w} - 1$ entsteht, daher setze man an ihre Stelle $\frac{g^{n+w}}{g^{n+w} - 1}$, so wird

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1} \cdot \frac{1}{g^{h+n}} \cdot \frac{g^{n+w}}{g^{n+w} - 1} \cdot g \\ &= \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1} \cdot g^{-(h+n)} \cdot \frac{g^{n+w}}{g^{n+w} - 1} \cdot g \\ &= \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1} \cdot \frac{g^{n+w-(h+n)}}{g^{n+w} - 1} \cdot g \\ &= \frac{(g^{n+1} - 1) \cdot g^{w-h}}{(g - 1) \cdot (g^{n+w} - 1)} \cdot g \end{aligned}$$

Hierinne ist der Zähler

$$(s^{n+1} - t), s^{w-h} = s^{n+1} \cdot s^{w-h} - s^{w-h} = s^{n+w-(h-1)} - s^{w-h}.$$

$$\text{Daher wird } \Sigma = \frac{s^{n+w-(h-1)} - s^{w-h}}{(s-1) \cdot (s^{n+w} - 1)}$$

$$\text{oder } \Sigma = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s^{n+w-(h-1)} - s^{w-h}}{s^{n+w} - 1}$$

Schon oben wurde erinnert, daß $\log. s = \log. (\xi + 1) - \log. \xi$, also $s = \frac{\xi + 1}{\xi}$,
daher $s - 1 = \frac{\xi + 1}{\xi} - 1 = \frac{1}{\xi}$, und $\frac{1}{s-1} = 1 : \frac{1}{\xi} = \xi$. Man setze daher ξ statt
 $\frac{1}{s-1}$ in letztere Formel, so wird

$$\Sigma = \frac{\xi \cdot [s^{n+w-(h-1)} - s^{w-h}]}{s^{n+w} - 1}$$

$$\text{oder } \Sigma = \frac{s^{n+w-(h-1)} \cdot \xi - s^{w-h} \cdot \xi}{s^{n+w} - 1}$$

Hierinne setze man nun

$$O = s^{n+w}, P = s^{n+w-(h-1)} \cdot \xi, Q = s^{w-h} \cdot \xi$$

so wird $\log. O = (n+w) \cdot \log. s$

$$= (n+w) \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi]$$

$$\log. P = \log. s^{n+w-(h-1)} + \log. \xi$$

$$= (n+w-(h-1)) \cdot \log. s + \log. \xi$$

$$= (n+w) \cdot \log. s - (h-1) \cdot \log. s + \log. \xi$$

$$= \log. O - (h-1) \cdot \log. s + \log. \xi$$

$$= \log. O - (h-1) \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi] + \log. \xi$$

$$\log. Q = \log. s^{w-h} + \log. \xi$$

$$= (w-h) \cdot \log. s + \log. \xi$$

$$= (w-h) \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi] + \log. \xi$$

$$= (w-h) \cdot \log. (\xi + 1) - (w-h) \cdot \log. \xi + \log. \xi$$

$$= (w-h) \cdot \log. (\xi + 1) - (w-h-1) \cdot \log. \xi$$

R.

$$\text{und } \Sigma = \frac{(P - Q) \cdot g}{O - 1}$$

Aus dieser Formel findet man also den gesuchten Kaufpreis Σ , wenn man zuvor die Werthe von P , Q und O durch die Formeln

$$\log. O = (n + w) \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi]$$

$$\log. P = \log. O - (h - 1) \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi] + \log. \xi$$

$$\log. Q = (w - h) \cdot \log. (\xi + 1) - (w - h - 1) \cdot \xi$$

bestimmt.

Anmerkung.

Nach diesen Formeln sind diejenigen, die Hr. v. O. zur Auflösung dieser Aufgabe im 48. §. mitgetheilt hat, zu verbessern.

No. XXXI.

[§.49.]

Es ist ein Forst von der Beschaffenheit, daß in jedem nächst bevorstehenden n Jahre ein gleicher Holzschlag, von g Thalern an Werthe, daraus wirtschaftlich genommen werden kann; in den darauf folgenden w Jahre aber muß der Forst mit Holzschlägen gänzlich verschont; nach deren Verfluß in n Jahren durch $n + 1$ jährliche Holzschläge, von gleichem Betrage, und von g Thaler an Werthe, völlig abgetrieben; hierauf w Jahre abermahls geschont; von neuem mit $n + 1$ jährlichen gleich großen Holzschlägen, von gleichem Nutzungsbetrage g , n Jahre hindurch abgetrieben, und mit Abwechslung der Schonungsjahre w und Nutzungsjahre n *) auf immer fortgefahren werden. Diesen Forst ist jemand gesonnen an sich zu kaufen, und die zu erlegende Kaufsumme Σ mit den davon zu rechnenden jährlichen Zinsen zu $100 : \xi$ pro Cent jährlich zu nutzen. Man fragt, wie groß der jetzt zu erlegende Kaufpreis Σ dieses Forstes seyn muß, damit der Käufer weder Schaden, noch Vortheil habe.

*) Im Autor steht $n + 1$, ist aber falsch.

Auflösung.

Es seyen $^1\alpha$, $^2\alpha$, $^3\alpha$, $^4\alpha$, u. s. f. $^n\alpha$ die jetzigen Kaufpreise, der nach 1, 2, 3, 4, u. s. f. n Jahren zu fallenden Holzschläge, deren jeder zur Zeit seiner Fällung g Thaler werth ist, so findet man diese Kaufpreise, wenn man in die Formel ^8M g statt b und nach und nach $^1\alpha$, $^2\alpha$, $^3\alpha$, $^4\alpha$, u. s. f. $^n\alpha$ statt a , und in eben der Ordnung 1, 2, 3, 4 u. s. f. n statt h setzt, durch die Formeln

$$\log. ^1\alpha = \log. g - 1 \cdot \log. 8$$

$$\log. ^2\alpha = \log. g - 2 \cdot \log. 8$$

$$\log. ^3\alpha = \log. g - 3 \cdot \log. 8$$

u. s. f.

$$\log. ^n\alpha = \log. g - n \cdot \log. 8$$

Wenn man von diesen Formeln die Logarithmen weghebt, so entsteht

$$^1\alpha = \frac{g}{8} = \frac{g}{8} \cdot 1$$

$$^2\alpha = \frac{g}{8^2} = \frac{g}{8} \cdot \frac{1}{8}$$

$$^3\alpha = \frac{g}{8^3} = \frac{g}{8} \cdot \frac{1}{8^2}$$

$$^4\alpha = \frac{g}{8^4} = \frac{g}{8} \cdot \frac{1}{8^3}$$

u. s. f.

$$^n\alpha = \frac{g}{8^n} = \frac{g}{8} \cdot \frac{1}{8^{n-1}}$$

Nun sey s die Summe aller Kaufpreise $^1\alpha$, $^2\alpha$, $^3\alpha$, $^4\alpha$ u. s. f. $^n\alpha$, so wird

$$s = \frac{g}{8} \cdot \left[1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \dots + \frac{1}{8^{n-1}} \right]$$

S

Man erhält aber durch die Division" von g durch $g-1$

$$\frac{g}{g-1} = 1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots + \frac{1}{g^{n-1}} + \frac{1}{g-1} \cdot \frac{1}{g^{n-1}}$$

Daher wird $1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots + \frac{1}{g^{n-1}} = \frac{g}{g-1} - \frac{1}{g-1} \cdot \frac{1}{g^{n-1}}$

$$= \frac{g - \frac{1}{g^{n-1}}}{g-1} = \frac{g^{n-1} \cdot \left(g - \frac{1}{g^{n-1}} \right)}{g^{n-1} \cdot (g-1)} = \frac{g^n - 1}{g^{n-1} \cdot (g-1)}$$

Folglich ist $s = \frac{g}{g} \cdot \frac{g^n - 1}{g^{n-1} \cdot (g-1)} = \frac{(g^n - 1) \cdot g}{g^n \cdot (g-1)}$

Es ist aber hier, wie in No. XXX. $g-1 = \frac{1}{\xi}$, daher ist

$$s = \frac{(g^n - 1) \cdot g}{g^n \cdot \frac{1}{\xi}} = \frac{\xi \cdot (g^n - 1) \cdot g}{g^n} = \frac{(g^n \cdot \xi - \xi) \cdot g}{g^n}$$

Da nun der Forst nach Ablauf der $n+w$ Jahre, in den darauf folgenden n Jahren durch $n+1$ jährliche Holzschläge, von gleichem Betrage, gänzlich abgeholzt, dann w Jahre geschont, und nach Ablauf derselben wieder in den folgenden n Jahren durch $n+1$ jährliche Holzschläge abgeholzt, und wieder w Jahre geschont, und auf diese Art bis ins Unendliche fortgefahren werden soll, so sey s' der jährliche Kaufpreis aller dieser nach Ablauf der $n+w$ Jahre schlagbaren Holznutzungen, deren jede zur Zeit ihrer Fällung g Thaler beträgt, so wird der Werth von s' durch die Formel

$$\Sigma = \frac{(g^{n+w-(h-1)} \cdot \xi - g^{w-h} \cdot \xi) \cdot g}{g^{n+w} - 1} + \frac{1}{g} + 1 \Big] \cdot \frac{1}{g} =$$

welche vor dem Ende der vorigen Nummer gefunden wurde, bekannt, wenn man in sie s' statt Σ und $n+w$ statt h setzt. Diesem nach ist

$$\begin{aligned}
 s' &= \frac{g^{n+w-(n+w-1)} \cdot \xi - g^{w-(n+w)} \cdot \xi}{g^{n+w} - 1} \cdot g \\
 &= \frac{[g^{n+w-(n+w-1)} \cdot \xi - g^{w-(n+w)} \cdot \xi] : g^{w-(n+w)} \cdot \xi}{(g^{n+w} - 1) : g^{w-(n+w)} \cdot \xi} \cdot g \\
 &= \frac{g^{n+w-(n+w-1)-(w-(n+w))} - g^{w-(n+w)-(w-(n+w))}}{g^{n+w-(w-(n+w))} : \xi - g^{-(w-(n+w))} : \xi} \cdot g \\
 &= \frac{g^{n+w-n-w+1-w+n+w} - g^{w-n-w-w+n+w}}{g^{n+w-w+n+w} : \xi - g^{-w+n+w}} \cdot g \\
 &= \frac{(g^{n+1} - 1) \cdot g}{g^{n+1} \cdot g^{n+w-1} : \xi - g^{n+w-w} : \xi}
 \end{aligned}$$

Nun ist die gesuchte Kaufsumme $\Sigma = s + s'$

$$\text{also } \Sigma = \frac{(g^n \cdot \xi - \xi) \cdot g}{g^n} + \frac{(g^{n+1} - 1) \cdot g}{g^{n+1} \cdot g^{n+w-1} : \xi - g^{n+w-w} : \xi}$$

Hierinne setze man nun $g^n \cdot \xi = R$, also $g^n = R : \xi$. Ferner $g^{n+1} = S$ und $g^{n+1} \cdot g^{n+w-1} : \xi = T$, endlich $g^{n+w-w} : \xi = V$, so wird

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \frac{(R - \xi) \cdot g}{R : \xi} + \frac{(S - 1) \cdot g}{T - V} \\
 \text{oder } \Sigma &= \frac{\xi \cdot (R - \xi) g}{R} + \frac{(S - 1) \cdot g}{T - V}
 \end{aligned}$$

Wenn man nun die Logarithmen von R , S , T und V nimmt, so wird, da $\log. g = \log. (\xi + 1) - \log. \xi$ bekannt ist

$$\begin{aligned}
 \log. R &= \log. g^n \cdot \xi \\
 &= \log. g^n + \log. \xi \\
 &= n \cdot \log. g + \log. \xi \\
 &= n \cdot [\log. (\xi + 1) - \log. \xi] + \log. \xi \\
 &= n \cdot \log. (\xi + 1) - n \cdot \log. \xi + \log. \xi \\
 &= n \cdot \log. (\xi + 1) - (n - 1) \cdot \log. \xi
 \end{aligned}$$

Ferner wird $\log. S = \log. s^{n+1}$

$$= (n+1) \cdot \log. s$$

$$= (n+1) \cdot [\log. (\xi+1) - \log. \xi]$$

und $\log. T = \log. (s^{n+1} \cdot s^{n+w-1} : \xi)$

$$= \log. s^{n+1} + \log. s^{n+w-1} - \log. \xi$$

$$= \log. S + (n+w-1) \cdot [\log. (\xi+1) - \log. \xi] - \log. \xi$$

Endlich $\log. V = \log. (s^{n+w-w} : \xi)$

$$= \log. s^{n+w-w} - \log. \xi$$

$$= (n+w-w) \cdot [\log. s - \log. \xi]$$

$$= (n+w-w) \cdot [\log. (\xi+1) - \log. \xi] - \log. \xi$$

Wenn man also die Werthe von R , S , T , und V durch die Formeln

$$\log. R = n \cdot \log. (\xi+1) - (n-1) \cdot \log. \xi$$

$$\log. S = (n+1) \cdot [\log. (\xi+1) - \log. \xi]$$

$$\log. T = \log. S + (n+w-1) \cdot [\log. (\xi+1) - \log. \xi] - \log. \xi$$

$$\log. V = (n+w-w) \cdot [\log. (\xi+1) - \log. \xi] - \log. \xi$$

berechnet hat, so findet man den gesuchten Kaufpreis Σ durch die Formel

$$^1S. \quad \Sigma = \frac{\xi \cdot (R - \xi) g}{R} + \frac{(S - 1) \cdot g}{T - V}$$

Anmerk. Hiernach sind die Formeln des Hrn. v. O., die er zur Auflösung dieser Aufgabe mitgetheilt hat, zu verbessern.

XXXII.

[§. 51.] Wenn man alles, was Hr. v. O. im nebenstehenden §. sagt, mit einander vergleicht, so entdeckt man erst mit Mühe, daß folgende Aufgabe der Gegenstand dieses §. seyn soll.

Ein Waldbestand a wächst jährlich nach dem Verhältnisse, wie $m:1$. Dieser soll sogleich und nach Ablauf eines jeden Jahres mit einem Holzschlage angegriffen, und die abgeholzten Plätze gleich wieder besät werden. Der jährliche Zu-

Wuchs des jungen Holzes ist durch eine Function X bestimmt. Man soll in jedem Jahre den Betrag des Holzschlags so groß machen, als der gesammte Zuwachs in dem Jahre, worinne der Holzschlag geschieht, betragen hat, damit die Summe der Waldbestände auf den noch geschonten sowohl, als den bereits abgeholzten Plätzen nach jedem erfolgenden Holzschlage unveränderlich dem Waldbestande gleich sey, der nach dem ersten Holzschlag übrig verbleibt.

Wir haben keine Gründe aufgefunden, woraus die Gültigkeit der Formel

$$g = a : (m + 1) + m^v \cdot X : (m + 1)^v,$$

wodurch der Autor der Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehäue den Betrag g des v ten Holzschlags zu bestimmen gedenkt, erwiesen werden könnte. Wir wollen daher dem am Ende des 51 §. gegebenen Winke des Hrn. v. O. folgen, und diese Aufgabe nach den Grundsätzen der Algebra auflösen, vorher aber die Aufgabe selbst unter folgende Form bringen:

I.

Ein gleich dicht mit einerley Holz, von gleichem Alter, bestandener Forst von a Klaftern soll sogleich und nach Ablauf eines jeden Jahres mit einem Holzschlage angegriffen werden, und die dadurch abgetriebenen Plätze gleich nach der Fällung des auf ihnen gestandenen Holzes mit eben der Holzart wieder eben so dicht besät werden. Man rechnet zur Zeit des ersten Holzschlags auf jedem Flächenraum f des gegebenen Forstes p Klaftern Holz und q Bäume, und der jährliche Zuwachs geschieht nach dem Verhältnisse $m : 1$. Das Gesetz, wornach der neue Anwuchs jährlich fortwächst, ist gegeben. Es soll in jedem Jahre der Holzschlag so groß gemacht werden, als der gesammte Zuwachs in dem Jahre, worinne der Holzschlag geschieht, betragen hat, damit nach jedem Holzschlage, an jungem und altem Holze, ein unveränderlicher Waldbestand verbleibe, oder damit vor jedem Holzschlage ein unveränderlicher Waldbestand von a Klaftern vorhanden sey. Man sucht

- 1) Die Größe eines jeden Holzschlags.
- 2) Die Menge des auf jedem Gehauplatze ansznstreuenden Samens.
- 3) Die Größe eines jeden Gehauplatzes.

Auflösung.

I.

1) $g, {}^2g, {}^3g$ u. s. f. ${}^vg$ seyen die in dem Zwischenraume eines Jahres, auf einander folgenden Holzschläge.

$\eta, {}^2\eta, {}^3\eta$ u. s. f. ${}^v\eta$ seyen die Samenmengen, die zur Wiederbesamung der durch die Holzschläge $g, {}^2g, {}^3g$ u. s. f. ${}^vg$ abgetriebenen Waldräume nöthig sind.

$\Delta\eta, {}^2\Delta\eta, {}^3\Delta\eta$ u. s. f. seyen die auf dem ersten Gehauplatz durch die Samenmenge η entstandenen und auf einander folgenden jährlichen Incremente.

$\Delta^2\eta, {}^2\Delta^2\eta, {}^3\Delta^3\eta$ u. s. f. seyen die auf dem zweyten Gehauplatz durch die Samenmenge ${}^2\eta$ entstandenen und auf einander folgenden jährlichen Incremente

Und allgemein: wenn ${}^v\eta$ die auf dem v ten Gehauplatze ausgestreute Samenmenge bedeutet, so seyen $\Delta^v\eta, {}^2\Delta^v\eta, {}^3\Delta^v\eta$ u. s. f. die jährlich hintereinander folgenden Incremente.

Da nun hier zwey Waldbestände in Betrachtung kommen, einer, der nach und nach durch die jährlichen Holzschläge abgetrieben wird, und ein anderer, der durch die jedesmahlige Wiederbesamung der Gehauplätze entsteht, so mag ersterer der alte, und letzterer der junge Forst heißen.

Nun mögen $r, {}^2r, {}^3r$ u. s. f. ${}^vr$ die Waldbestände ausdrücken, die von dem alten Forste nach dem ersten, zweyten, dritten u. s. f. v ten Holzschlage übrig verbleiben.

$Z, {}^2Z, {}^3Z$ u. s. f. ${}^vZ$ mögen die Zuwachsbeträge des alten und $z, {}^2z, {}^3z$ u. s. f. ${}^vz$ mögen die gesammten Zuwachsbeträge des jungen Forstes in dem 1sten, 2ten, 3ten u. s. f. v ten Jahre bedeuten.

Endlich mögen $F, {}^2F, {}^3F$ u. s. f. ${}^vF$ die Flächenräume des 1sten, 2ten, 3ten u. s. f. v ten Gehauplatzes anzeigen.

2) Diesem zu Folge ist

$$z = \Delta\eta$$

$${}^2z = {}^2\Delta\eta + \Delta^2\eta$$

$${}^3z = {}^3\Delta\eta + {}^2\Delta^2\eta + \Delta^3\eta$$

$${}^4z = {}^4\Delta\eta + {}^3\Delta^2\eta + {}^2\Delta^3\eta + \Delta^4\eta$$

$${}^5z = {}^5\Delta\eta + {}^4\Delta^2\eta + {}^3\Delta^3\eta + {}^2\Delta^4\eta + \Delta^5\eta$$

$${}^6z = {}^6\Delta\eta + {}^5\Delta^2\eta + {}^4\Delta^3\eta + {}^3\Delta^4\eta + {}^2\Delta^5\eta + \Delta^6\eta$$

u. s. f.

Folglich im Allgemeinen

$${}^vz = {}^v\Delta\eta + {}^{v-1}\Delta^2\eta + {}^{v-2}\Delta^3\eta + {}^{v-3}\Delta^4\eta + \dots + {}^2\Delta^{v-1}\eta + \Delta^v\eta$$

Es drückt hier jede Reihe den Zuwachsbetrag aus, den der junge Forst, in demjenigen Jahre, welches hinter dem Buchstaben z als Algorithmus erscheint, erhalten hat.

3) Nun soll nach den Bedingungen der Aufgabe jeder v te Holzschlag (${}^vg$) so groß gemacht werden, als in dem verflossenen v — iten Jahre der Zuwachs ${}^{v-1}Z$ des alten Forstes und der Zuwachs ${}^{v-1}z$ des jungen Forstes zusammengenommen betragen haben. Es ist also

$${}^vg = {}^{v-1}Z + {}^{v-1}z$$

4) Jede m Klaftern des alten Forstes geben aber in einem Jahre 1 Klafter Zuwachs, also erlangt der $(v-1)$ te verbleibende Waldbestand des alten Forstes, nämlich ${}^{v-1}r$, in dem $(v-1)$ ten Jahre einen Zuwachsbetrag von $\frac{1}{m} \cdot {}^{v-1}r$ Klaftern.

Demnach ist:

$${}^{v-1}Z = \frac{1}{m} \cdot {}^{v-1}r$$

5) Diesen Werth von ${}^{v-1}Z$ setze man in 3, so wird

$${}^vg = \frac{1}{m} \cdot {}^{v-1}r + {}^{v-1}z$$

6) Die Bedingungen der Aufgabe erfordern, daß nach jedem Holzschlage der Waldbestand im jungen und alten Forste dem, nach dem ersten Holzschlage, verbleibenden Waldbestande r gleich seyn soll. Da nun nach dem $(v-1)$ ten Holzschlag vom alten Forste der Waldbestand ${}^{v-1}r$ übrig bleibt, und der junge Forst zu einem Waldbestande $z + {}^2z + {}^3z + \dots + {}^{v-2}z$ angewachsen ist, so ist

$${}^{v-1}r + (z + {}^2z + {}^3z + \dots + {}^{v-2}z) = r$$

$$\text{also } {}^{v-1}r = r - (z + {}^2z + {}^3z + \dots + {}^{v-2}z)$$

7) Diesen Werth von ${}^{v-1}r$ setze man nun in 5, so wird

$${}^vg = \frac{1}{m} \cdot (r - z + {}^2z + {}^3z + \dots + {}^{v-2}z) + {}^{v-1}z$$

$$\text{oder } {}^vg = \frac{r}{m} - \frac{1}{m} \cdot (z + {}^2z + {}^3z + \dots + {}^{v-2}z) + {}^{v-1}z$$

8) Folglich der $(v-1)$ te Holzschlag

$${}^{v-1}g = \frac{r}{m} - \frac{1}{m} (z + {}^2z + {}^3z + \dots + {}^{v-3}z) + {}^{v-2}z,$$

$$\text{Man addire } 0 = -\frac{1}{m} {}^{v-2}z + \frac{1}{m} \cdot {}^{v-2}z$$

$$\text{so wird } {}^{v-1}g = \frac{r}{m} - \frac{1}{m} (z + {}^2z + {}^3z + \dots + {}^{v-3}z) - \frac{1}{m} \cdot {}^{v-2}z + \frac{1}{m} \cdot {}^{v-2}z + {}^{v-2}z$$

Man bringe die beyden letzten Gröſſen dieser Formel unter einen Nenner, und setze die zur Rechten der Parenthese stehende Gröſſe $-\frac{1}{m} \cdot {}^{v-2}z$ in die Parenthese mit dem Zeichen $+$, weil vor der Parenthese das Zeichen $-$ steht, so wird

$${}^{v-1}g = \frac{r}{m} - \frac{1}{m} (z + {}^2z + {}^3z + \dots + {}^{v-2}z) + \frac{m+1}{m} \cdot {}^{v-2}z$$

$$\text{Daher } {}^{v-1}g - \frac{m+1}{m} {}^{v-2}z = \frac{r}{m} - \frac{1}{m} \cdot (z + {}^2z + {}^3z + \dots + {}^{v-2}z)$$

8) Vermöge dieser Gleichung setze man nun $v^{-1}g = \frac{m+1}{m} \cdot v^{-2}z$ statt $\frac{r}{m}$
 $-\frac{1}{m} \cdot (z + {}^2z + {}^3z + \dots + v^{-2}z)$ in die 7 gefundene Formel für $v g$, so wird

$$v g = v^{-1}g + v^{-1}z - \frac{m+1}{m} \cdot v^{-2}z.$$

8T.

Wenn man in diese Formel nach und nach für v die Werthe 1, 2, 3, u. s. f. setzt, so findet man hieraus nach der Reihe alle Holzschläge durch die vorhergehenden ausgedrückt; nur den ersten nicht. Dieser ist jedoch ebenfalls durch die Forderung der Aufgabe, jeden Holzschlag so groß zu machen, als der Zuwachs in dem Jahre betragen hat, worinne der Holzschlag geschieht, bestimmt, wenn man die Gröfse (x) des Waldbestandes untersucht, die der Waldbestand a ein Jahr vor dem ersten Holzschlag hatte. $\frac{1}{m}x$ ist dann der Zuwachsbetrag in diesem Jahre, oder der Betrag des ersten Holzschlags g . Es ist nämlich

$$x + \frac{1}{m}x = a$$

$$\text{oder } \frac{m+1}{m} \cdot x = a$$

$$\text{folglich } x = \frac{m}{m+1} \cdot a$$

$$\text{also } g = \frac{x}{m} = \frac{m}{m+1} \cdot a : m = \frac{a}{m+1}$$

8U.

9) Nach den Bedingungen der Aufgabe vermehren sich jede m Klaftern des alten Forstes in einem Jahre um eine Klafter, und auf jeder Fläche f desselben stehen p Klaftern Holz, daher stehen nach Formel D auf dieser Fläche f , nach Ablauf von v Jahren $\left(\frac{m+1}{m}\right)^v \cdot p$ Klaftern. Auf dem Gehauplatze F befinden sich zu oben derselben Zeit $v g$ Klaftern. Demnach ist

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^v \cdot p : f = v g : v F$$

folglich ${}^vF = \frac{f \cdot {}^vg}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^v \cdot p}$

${}^vV.$ oder ${}^vF = \frac{f}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^v \cdot {}^vg$

welche Formel der zweyten Forderung in der Aufgabe Gnüge leistet.

10) Auf dem Platze f stehen q Bäume, und auf dem Gehauplatze ${}^vF$ sollen ${}^v\eta$ Bäume gesäet werden. Da nun der Wald immer gleiche Dichtigkeit behalten soll, so stehen diese vier Grössen miteinander in folgender Proportion

$$f : {}^vF = q : {}^v\eta.$$

Und, wenn man hierinn den eben gefundenen Werth von ${}^vF$ setzt, so wird

$$f : \frac{f}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^v \cdot {}^vg = q : {}^v\eta$$

${}^8W.$ also ${}^v\eta = \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^v \cdot {}^vg,$

wodurch die dritte Forderung der Aufgabe in Erfüllung gebracht wird.

11) Diese hier gefundenen Formeln ${}^8T$, ${}^8V$, ${}^8W$ leisten nun den Forderungen der Aufgabe Gnüge, wenn das Gesetz bekannt ist, wornach das Holz/im jungen Forste seinen Fortwuchs erhält. Es sollen nun durch Annahme irgend eines Gesetzes des Fortwuchses diese Formeln mehr ins Licht gesetzt, und ihr eigentlicher Gebrauch hierbey gezeigt werden.

II.

12) Es sey daher λ eine ganze oder gebrochene Zahl, die für jede Holzgattung durch die Erfahrung besonders zu bestimmen ist. Hierbey sey ausgemacht, daß in jedem u ten Jahre, von der Saatzeit an, jede $u\lambda$ Klaftern des auf jedem Gehauplatze von einerley Alter vorhandenen Holzes 1 Klafter Zuwachs erhalten, und man habe gefunden, daß dieses Gesetz des Fortwuchses erst von dem dritten Jahre an nach der Besamung seine Gültigkeit erlange, und daß das Holz, was in den ersten bey-

den Jahren aus dem Samen erwächst, unbeträchtlich und als 0 in Rechnung zu bringen sey. Es sey überdies bekannt, daß aus der Samenmenge s nach Ablauf von drey Jahren k Klaftern Holz entstehen.

13) Bey diesen Annahmen werden die ersten Incremente jeder Verticalreihe in (2) zu 0, und daher

$$z = 0$$

$$^2z = 0$$

$$^3z = ^3\Delta\eta$$

$$^4z = ^4\Delta\eta + ^3\Delta^2\eta$$

$$^5z = ^5\Delta\eta + ^4\Delta^2\eta + ^3\Delta^3\eta$$

$$^6z = ^6\Delta\eta + ^5\Delta^2\eta + ^4\Delta^3\eta + ^3\Delta^4\eta$$

$$^7z = ^7\Delta\eta + ^6\Delta^2\eta + ^5\Delta^3\eta + ^4\Delta^4\eta + ^3\Delta^5\eta$$

u. s. f.

Und im Allgemeinen

$$^vz = ^v\Delta\eta + ^{v-1}\Delta^2\eta + ^{v-2}\Delta^3\eta + \dots + ^3\Delta^{v-2}\eta$$

Nun müssen vor allen Dingen die Incremente

$$^3\Delta\eta, ^4\Delta\eta, ^5\Delta\eta \text{ u. s. f.}$$

$$\text{ferner } ^3\Delta^2\eta, ^4\Delta^2\eta, ^5\Delta^2\eta \text{ u. s. f.}$$

$$\text{ferner } ^3\Delta^3\eta, ^4\Delta^3\eta, ^5\Delta^3\eta \text{ u. s. f.}$$

u. s. f.

näher bestimmt werden.

14) Man mache hierbey den Anfang mit den Incrementen $^3\Delta\eta, ^3\Delta^2\eta, ^3\Delta^3\eta, ^3\Delta^4\eta$ u. s. f. $^v\Delta\eta$, welche an der Spitze jeder Vertikalreihe in (13) stehen. $^v\eta$ ist die auf dem v ten Gehauplatz erforderliche Samenmenge und $^3\Delta^v\eta$ das hieraus, nach Ablauf von 3 Jahren, erwachsene Holz. Nach (12) wachsen k Klaftern in dieser Zeit aus der Samenmenge s , daher ist

$$s : k = ^v\eta : ^3\Delta^v\eta$$

Hierinne ist aber nach der Formel ${}^8W$

$${}^v\eta = \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^v \cdot {}^vg$$

$$\text{folglich } s : k = \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^v \cdot {}^vg : {}^3\Delta^v\eta$$

$$\text{oder } {}^3\Delta^v\eta = \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^v \cdot {}^vg$$

In diese Formel setze man nach und nach die Werthe 1, 2, 3, u. s. f. statt v , so findet man

$${}^3\Delta\eta = \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right), g$$

$${}^3\Delta^2\eta = \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \cdot {}^2g$$

$${}^3\Delta^3\eta = \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^3 \cdot {}^3g$$

u. s. f.

15) Nun finden nach dem Gesetze des Fortwuchses in (12) folgende Proportionen statt

$$1) 4\lambda : 1 = {}^3\Delta^v\eta : {}^4\Delta^v\eta$$

$$2) 5\lambda : 1 = {}^3\Delta^v\eta + {}^4\Delta^v\eta : {}^5\Delta^v\eta$$

$$3) 6\lambda : 1 = {}^3\Delta^v\eta + {}^4\Delta^v\eta + {}^5\Delta^v\eta : {}^6\Delta^v\eta$$

$$4) 7\lambda : 1 = {}^3\Delta^v\eta + {}^4\Delta^v\eta + {}^5\Delta^v\eta + {}^6\Delta^v\eta : {}^7\Delta^v\eta$$

$$5) 8\lambda : 1 = {}^3\Delta^v\eta + {}^4\Delta^v\eta + {}^5\Delta^v\eta + {}^6\Delta^v\eta + {}^7\Delta^v\eta : {}^8\Delta^v\eta$$

u. s. f.

Aus der ersten Proportion findet man

$${}^4\Delta^v\eta = \frac{1}{4\lambda} \cdot {}^3\Delta^v\eta$$

$$\text{folglich } {}^3\Delta^v\eta + {}^4\Delta^v\eta = {}^3\Delta^v\eta + \frac{1}{4\lambda} {}^3\Delta^v\eta = \frac{4\lambda+1}{4\lambda} \cdot {}^3\Delta^v\eta$$

Diesen Werth setze man in die zweyte Proportion, so wird

$$^5\lambda : 1 = \frac{4\lambda + 1}{4\lambda} \cdot ^3\Delta^v\eta : ^5\Delta^v\eta$$

$$\text{woraus } ^5\Delta^v\eta = \frac{4\lambda + 1}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot ^3\Delta^v\eta$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } ^3\Delta^v\eta + ^4\Delta^v\eta + ^5\Delta^v\eta &= \frac{4\lambda + 1}{4\lambda} \cdot ^3\Delta^v\eta + \frac{4\lambda + 1}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot ^3\Delta^v\eta \\ &= \left(\frac{4\lambda + 1}{4\lambda} + \frac{4\lambda + 1}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \right) \cdot ^3\Delta^v\eta \\ &= \left(\frac{5\lambda \cdot (4\lambda + 1)}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} + \frac{4\lambda + 1}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \right) \cdot ^3\Delta^v\eta \\ &= \frac{5 \cdot \lambda \cdot (4\lambda + 1) + 1 \cdot (4\lambda + 1)}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot ^3\Delta^v\eta \\ &= \frac{(4\lambda + 1) \cdot (5\lambda + 1)}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot ^3\Delta^v\eta \end{aligned}$$

Diesen Werth setze man in die dritte Proportion, so wird

$$6\lambda : 1 = \frac{(4\lambda + 1) \cdot (5\lambda + 1)}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot ^3\Delta^v\eta : ^6\Delta^v\eta$$

$$\text{folglich } ^6\Delta^v\eta = \frac{(4\lambda + 1) \cdot (5\lambda + 1)}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot ^3\Delta^v\eta$$

Bisher hat man gefunden

$$^3\Delta^v\eta = \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^v \cdot ^vg$$

^sX.

$$^4\Delta^v\eta = \frac{1}{4\lambda} \cdot ^3\Delta^v\eta$$

^sT.

$$\text{Ferner } ^5\Delta^v\eta = \frac{4\lambda + 1}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot ^3\Delta^v\eta$$

$$^6\Delta^v\eta = \frac{(4\lambda + 1) \cdot (5\lambda + 1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \lambda^3} \cdot ^3\Delta^v\eta$$

Man schliesse so fort, so findet man

$${}^7\Delta^v\eta = \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1) \cdot (6\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \lambda^4} \cdot {}^3\Delta^v\eta$$

$${}^8\Delta^v\eta = \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1) \cdot (6\lambda+1) \cdot (7\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \lambda^5} \cdot {}^3\Delta^v\eta$$

Und allgemein

$${}^x\Delta^v\eta = \frac{(4\lambda+1) (5\lambda+1) (6\lambda+1) \dots ((x-1)\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \dots x \cdot \lambda^{x-3}} {}^3\Delta^v\eta$$

Oder, wenn man hierinn den Werth von ${}^3\Delta^3\eta$ aus der Formel ${}^8X$ setzt, so wird

$${}^8Z. \quad {}^x\Delta^v\eta = \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1) \cdot (6\lambda+1) \dots ((x-1)\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \dots x \cdot \lambda^{x-3}} \cdot \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^v \cdot {}^vg$$

Dieses ist nun eine allgemeine Formel, woraus man alle einzelne Incremente in' (13), von $x=5$ an, für das in (12) angenommene Gesetz, ohne Ausnahme, finden kann, wenn nur ${}^vg$ für jedes v bekannt ist. Für $x=3$, und $x=4$ geben die Formeln ${}^8X$ und ${}^8T$ Auskunft. Suchte man z. B. das Increment ${}^7\Delta^5\eta$, so darf man nur in diese Formel $x=7$ und $v=5$ setzen, und also im Zähler die Factoren $4\lambda+1$, $5\lambda+1$, $6\lambda+1$, $7\lambda+1$ u. s. f. nur bis zum Factor $6\lambda+1$ und im Nenner die Factoren 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. f. nur bis zum Factor 7 fortsetzen. Daher wird

$${}^7\Delta^5\eta = \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1) \cdot (6\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \lambda^4} \cdot \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^5 \cdot {}^5g$$

16) Vermöge der Formeln ${}^8X$, ${}^8T$, ${}^8Z$, kann man nun die Werthe von ${}^3z$, ${}^4z$, ${}^5z$, ${}^6z$ u. s. f. in (13) auf folgende Art bestimmen. Es ist in (13)

$${}^vz = {}^v\Delta\eta + {}^{v-1}\Delta^2\eta + {}^{v-2}\Delta^3\eta + \dots + {}^3\Delta^{v-2}\eta$$

Oder, in umgekehrter Ordnung

$${}^vz = {}^3\Delta^{v-2}\eta + {}^4\Delta^{v-3}\eta + {}^5\Delta^{v-4}\eta + \dots + {}^v\Delta\eta$$

Hierinne ist nach der Reihe

$${}^3\Delta^{v-2}\eta = \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{v-2} \cdot v^{-2}g \quad (\text{nach } {}^8X)$$

$${}^4\Delta^{v-3}\eta = \frac{1}{4\lambda} \cdot \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{v-3} \cdot v^{-3}g \quad (\text{nach } {}^8Y)$$

$${}^5\Delta^{v-4}\eta = \frac{4\lambda+1}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{v-4} \cdot v^{-4}g$$

$${}^6\Delta^{v-5}\eta = \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \lambda^3} \cdot \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{v-5} \cdot v^{-5}g$$

$${}^7\Delta^{v-6}\eta = \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1) \cdot (6\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \lambda^4} \cdot \frac{qk}{ps} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{v-6} \cdot v^{-6}g$$

u. s. f.

$${}^v\Delta\eta = \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1) \cdot (6\lambda+1) \dots ((v-1)\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \dots v \cdot \lambda^{v-3}} \cdot \frac{qk}{ps} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g$$

Man addire alle diese Werthe und setze den gemeinschaftlichen Factor $\frac{qk}{ps}$ hinter eine Parenthese, so wird:

$$\begin{aligned} {}^vz = \frac{qk}{ps} \cdot \left[\left(\frac{m}{m+1}\right)^{v-2} \cdot v^{-2}g + \frac{1}{4\lambda} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{v-3} \cdot v^{-3}g + \frac{4\lambda+1}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{v-4} \cdot v^{-4}g \right. \\ \left. + \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \lambda^3} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{v-5} \cdot v^{-5}g + \dots + \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1) \dots ((v-1)\lambda+1) \cdot m}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \dots v \cdot \lambda^{v-3} \cdot (m+1)} \cdot g \right] {}^9A. \end{aligned}$$

Diese Formel drückt nur den gesammten Zuwachsbetrag des jungen Forstes auf allen Gehauplätzen im v ten Jahre, für das in (12) angenommene Gesetz, aus. Setzt man in sie nach und nach $v=3$, $v=4$, $v=5$ u. s. f. so findet man die Werthe von ${}^4z$, z^5 , z^6 u. s. f. (13) nämlich

$${}^3z = \frac{qk}{ps} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g$$

$${}^4z = \frac{qk}{ps} \cdot \left[\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \cdot {}^2g + \frac{1}{4\lambda} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g \right]$$

$${}^5z = \frac{qk}{ps} \cdot \left[\left(\frac{m}{m+1} \right)^3 \cdot {}^3g + \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \cdot {}^2g + \frac{4\lambda+1}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g \right]$$

$${}^6z = \frac{qk}{ps} \cdot \left[\left(\frac{m}{m+1} \right)^4 \cdot {}^4g + \frac{1}{4\lambda} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^3 \cdot {}^3g + \frac{4\lambda+1}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \cdot {}^2g \right. \\ \left. + \frac{(4\lambda+1) \cdot (5\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \lambda^3} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g \right]$$

u. s. f.

Durch diese Vorbereitung ist man nun erst in Stand gesetzt nach und nach die Holzschläge und zwar jeden folgenden durch die vorhergehenden zu bestimmen, und durch sie die Gehauplätze und die auf ihnen erforderlichen Samenmengen zu berechnen, wie folget.

17) Der Betrag des ersten Holzschlags ist

$$1) \ g = \frac{a}{m+1} \quad (\text{nach } {}^8U)$$

$$2) \ F = \frac{f}{p} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g \quad (\text{nach } {}^8V)$$

$$3) \ \eta = \frac{q}{p} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g \quad (\text{nach } {}^8W)$$

18) Den zweyten Holzschlag findet man nun durch

$${}^2g = g + z - \frac{m+1}{m} \cdot z^0 \quad (\text{nach } {}^8T)$$

Hierinne ist ${}^0z = {}^1z = 0$, also

$$1) \ {}^2g = g$$

$$2) \ {}^2F = \frac{f}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \cdot {}^2g \quad (\text{nach } {}^8V)$$

$$3) \ {}^2\eta = \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \cdot {}^2g \quad (\text{nach } {}^8W)$$

19) Man findet ferner den dritten Holzschlag

$$^3g = ^2g + ^2z - \frac{m+1}{m} \cdot z \quad (\text{nach } ^8T)$$

Hierinne ist wieder $z = ^2z = 0$ (12), folglich

$$1) \quad ^3g = ^2g = g$$

$$2) \quad ^3F = \frac{f}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^3 \cdot ^3g \quad (\text{nach } ^8V)$$

$$3) \quad ^3\eta = \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^3 \cdot ^3g \quad (\text{nach } ^8W)$$

20) Der 4te Holzschlag ^4g wird bestimmt durch

$$^4g = ^3g + ^3z - \frac{m}{m+1} \cdot ^2z \quad (\text{nach } ^8T)$$

Hierinne ist $^2z = 0$ und $^3z = \frac{qk}{ps} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g$ (16), also

$$1) \quad ^4g = ^3g + \frac{qk}{ps} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g$$

$$2) \quad ^4F = \frac{f}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^4 \cdot ^4g \quad (\text{nach } ^8V)$$

$$3) \quad ^4\eta = \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^4 \cdot ^4g \quad (\text{nach } ^8W)$$

21) Es ist ferner der 5te Holzschlag

$$^5g = ^4g + ^4z - \frac{m+1}{m} \cdot ^3z \quad (\text{nach } ^8T)$$

und wenn man hierein aus (16) die Werthe von ^4z und ^3z setzt, so wird

$$^5g = ^4g + \frac{qk}{ps} \cdot \left[\left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \cdot ^2g + \frac{1}{4\lambda} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g \right]$$

$$- \frac{m+1}{m} \cdot \frac{qk}{ps} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g$$

Oder 1) ${}^5g = {}^4g + \frac{qk}{ps} \left[\left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \cdot {}^2g + \frac{1}{4\lambda} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g - g \right]$

2) ${}^5F = \frac{f}{p} \cdot \left[\frac{m}{m+1} \right]^5 \cdot {}^5g$ (nach ${}^8V$

3) ${}^5\eta = \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^5 \cdot {}^5g$ (nach ${}^8W$

22) Ferner wird der 6te Holzschlag

$${}^6g = {}^5g + {}^5z - \frac{m+1}{m} \cdot {}^4z \quad (\text{nach } {}^8T$$

Hierein setze man die Werthe von ${}^5z$ und ${}^4z$ aus (16), so findet man

$$1) {}^6g = {}^5g + \frac{qk}{ps} \cdot \left[\left(\frac{m}{m+1} \right)^3 \cdot {}^3g + \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \cdot {}^2g + \frac{(4\lambda+1)}{4 \cdot 5 \cdot \lambda^2} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g - \frac{m+1}{m} \cdot \left[\left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \cdot {}^2g + \frac{1}{4\lambda} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot g \right] \right]$$

2) ${}^6F = \frac{f}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^6 \cdot {}^6g$ (nach ${}^8V$

3) ${}^6\eta = \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^6 \cdot {}^6g$ (nach ${}^8W$

Wenn man auf diese Art die Rechnung fortsetzt, und jeden Holzschlag danach einrichtet, so bleibt, nach der Fällung eines jeden, auf den geschonten sowohl, als den bereits abgeholzten Plätzen zusammen genommen ein unveränderlicher Wald-

bestand von $a - g = a - \frac{a}{m+1} = \frac{(m+1) \cdot a - a}{m+1} = \frac{ma}{m+1}$ Klaftern, der gerade so groß ist, als der gegebene Waldbestand a im Jahr vor dem ersten Holzschlag war (12).

No. XXXIII.

[§. 52.] Im 52 §. betrachtet Hr. v. O. einen Forst, der von dem ersten Holzschlage a Klaftern enthält, und dessen Tragbarkeit von der Beschaffenheit ist, daß sowohl

das schlagbare, als das auf den abgeholzten Plätzen neu erwachsene junge Holz nach einerley Verhältniß $m : 1$ seinen jährlichen Fortwuchs erhält. Diesen Forst will er nach dem ersten Holzschlage jährlich mit einem Holzschlage, von einem solchen Betrage angreifen, daß vor jedem Holzschlage ein unveränderlicher Waldbestand von a Klaftern an schlagbarem und jungem Holze vorhanden sey. Er untersucht hierauf die Größe eines jeden jährlichen Holzschlags, und die Anzahl derselben, nach deren Fällung der schlagbare Forst gänzlich abgetrieben und ein junger Forst dessen Stelle vertritt, der ein Jahr nach dem letzten Holzschlage wieder den Betrag von a Klaftern erreicht hat.

Das Resultat seiner Untersuchungen läuft dahin aus, daß ein jeder Holzschlag $= \frac{a}{m}$ gemacht werden müsse, und die Anzahl n derselben aus der Formel

$$n = \log. (m+1) : [\log. (m+1) - \log. m]$$

herzuleiten sey.

Es läßt sich aber nicht wohl denken, daß junger Anwuchs, nach eben dem Verhältnisse, seinen Zuwachs erhalte, als schlagbares Holz, und im Fall auch dieses statt finden könnte, so läßt sich nach voriger Erläuterung leicht erweisen, daß dabey die jährlichen Holzschläge nicht einander gleich seyn können. Ueberdies paßt ebengedachte Formel, und die dadurch berechnete Tabelle nichts weniger, als für obigen Forst, sondern einzig und allein für folgende Aufgabe, wovon im 51 §. gar nicht die Rede ist. Auch die Anwendung, die Hr. v. O. von der im 52 §. beygefügteten Tabelle auf ein Capital macht, findet, wie alles übrige in diesem §., nicht Statt.

Aufgabe.

Ein Waldbestand a , von dem jede m Klaftern jährlich 1 Klafter Zuwachs geben, wird sogleich, und nach Verfluß eines jeden Jahres mit einem Holzschlage $g = \frac{a}{m}$ angegriffen. Nach wie viel Holzschlägen (n) wird der Waldbestand a gänzlich abgeholzet seyn?

Auflösung.

Man setze in die Formel G n statt $n + 1$, also $n - 1$ statt n und $g = \frac{a}{m}$, so wird

$$\begin{aligned} [(m+1)^n - m^n] \cdot \frac{a}{m} &= (m+1)^{n-1} \cdot a \\ (m+1)^n - m^n &= m \cdot (m+1)^{n-1} \\ (m+1) \cdot (m+1)^{n-1} - m^n &= m \cdot (m+1)^{n-1} \\ (m+1) \cdot (m+1)^{n-1} - m \cdot (m+1)^{n-1} &= m^n \\ m \cdot (m+1)^{n-1} + (m+1)^{n-1} - m \cdot (m+1)^{n-1} &= m^n \end{aligned}$$

$$\text{also } (m+1)^{n-1} = m^n$$

$$\text{folglich } (n-1) \cdot \log. (m+1) - \log. (m+1) = n \cdot \log. m$$

$$\text{oder } n \cdot \log. (m+1) - \log. (m+1) = n \cdot \log. m$$

$$\text{und } n \cdot (\log. (m+1) - \log. m) = \log. (m+1)$$

$$\text{und hieraus } n = \log. (m+1) : [\log. (m+1) - \log. m].$$

Hr. v. O. hat in der angeführten Tabelle, den Werth von m in lauter Zehnteln ausgedrückt; will man ihm daher bey der Erweiterung der Tabelle darinne nachahmen, so wird man bey der Berechnung einige Bequemlichkeit finden, wenn man m auch allgemein durch einen Bruch ausdrückt, der 10 zum Nenner hat. Z. B. man setze $m = \frac{u}{10}$, so wird

$$n = \log. \left(\frac{u}{10} + 1 \right) : \left[\left(\frac{u}{10} + 1 \right) - \log. \frac{u}{10} \right]$$

$$\text{oder } n = \log. \frac{u+10}{10} : \left[\log. \left(\frac{u+10}{10} \right) - \log. \frac{u}{10} \right]$$

$$\text{oder } n = [\log. (u+10) - \log. 10] : [\log. (u+10) - \log. 10 - \log. u + 10 \log.]$$

$$\text{oder } n = [\log. (u+10) - \log. 10] : [\log. (u+10) - \log. u]$$

In diese Formel setze man nun nach und nach für u die Werthe 10, 11, 12, 13 u. s. f. so findet man nach gehöriger Rechnung die Werthe von n , welche den

Werthen 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; und so fort von m zugehören. Die Werthe von n und m kann man dann in eine Tabelle tragen, die noch weit vollkommener ist, als des Hr. v. O. seine, worinne nur diejenigen Werthe von m eingetragen sind, die den Werthen 1, 2, 3, 4, u. s. f. von n zugehören. Wenn daher in obiger Aufgabe der Werth von m gegeben, so findet man aus einer solchen Tabelle den Werth von n und umgekehrt, wenn n gegeben, so findet man in ihr den gesuchten Werth von m. Der Inhalt des 53 §. ist schon in No. XVII. weitläufig auseinander gesetzt worden.

No. XXXIV.

Hr. v. O. beschließt sein Werk mit der Untersuchung über die größte Schlag- [§. 54-
würdigkeit des Holzes, und bestimmt hierbey, in welchem Alter ein Forst nach jedes- 65.]
mahliger Besamung gefällt werden muß, damit er durch die in gleichen Zeitwischenräumen wiederholten Abholzungen die möglichst größte Ausbeute an Holze gebe. Hiermit geht er zur Erreichung seines Entzwecks folgendergestalt zu Werke.

1) Wenn mit jedesmahligem Zwischenraume von l Jahren ein Holzschlag von a Klaftern p mahl in τ Jahren erfolgt, so ist die Summe dieser p mal wiederholten Abholzungen = pa

$$\text{und } \tau = pl$$

$$\text{also } p = \tau : l$$

$$\text{daher } pa = a\tau : l$$

Wird auf gleiche Weise nach jedesmahligem Verlaufe von l' Jahren ein Holzschlag von a' Klaftern q mahl in τ Jahren niedergelegt, so ist die Summe dieser q mahl wiederholten Abholzungen = qa'

$$\text{und } \tau = ql'$$

$$\text{also } q = \tau : l'$$

$$\text{daher } qa' = a'\tau : l'$$

$$\text{Hieraus folgt } pa : qa' = \frac{a\tau}{l} : \frac{a'\tau}{l'}$$

Oder wenn man die beyden letzten Glieder durch τ dividirt

$$pa : qa' = [a : l] : [a' : l']$$

Also ist die Nutzungssumme pa gröfser, als die Nutzungssumme qa' , wenn $a : l$ gröfser, als $a' : l'$ ist, und die Summe aller Holzschlagsbeträge wird in jedem, auch dem allerlängsten Zeitlaufe gröfser, als jede andere mögliche seyn, wenn $a : l$ gröfser ist, als jeder anderer nach seiner Entstehung ihm ähnlicher Werth $a' : l'$ (§. 62.).

2) Wir wollen nun mit Hrn. v. O. mittelst diesem Satze den Werth von l oder das Alter der gröfsten Schlagwürdigkeit, bey den verschiedenen Gesetzen des Wachsthums, näher zu bestimmen suchen:

„Es sey a ein Waldbestand, bey welchem die Jahre l seiner Schlagwürdigkeit „eben erfüllet worden. Es sey ein gewisses durch die Erfahrung bekräftigtes Ge- „setz des Wachsthums für eben diesen Waldbestand bekannt gemacht, welches Ge- „setz aber, nach Beschaffenheit vorkommender Forsteinrichtungen, für den neuen „Aufwuchs eines Waldraums nicht eher zu gelten anfängt, als bis nach Abholzung „des letztern φ Jahre verflossen sind. Geben nun hierbey ν Jahre das wahre Alter „des von seiner Aufkeimung an bis zu seiner gröfsten Schlagwürdigkeit gelangten „Holzes; so ist $\varphi + \nu = l$, und nur gedachtes Gesetz weiset, für des Holzes wah- „res Alter, oder für $l - \varphi$ Jahre, eine Zahl μ von der Eigenschaft an, dafs der „vorgegebene Waldbestand, in demselben Jahre, da er seine gröfste Schlagwürdig- „keit erlangt, zu seinem Jahreszuwachse, sich wie $\mu : 1$ verhält. Zugleich sey $\mu + \sigma$ „eben eine solche Zahl, welche, nach ebendemselben Gesetze des Wachsthums, für „das nächst folgende $(l - \varphi + 1)$ te Jahr des Fortwuchses statt findet. Hierauf nun „kann der Werth $a : l$ mit einem ihm ähnlichen, der aber den Jahren des Alters $\nu - 1$ „zukommt, so wohl, als mit einem solchen, der dem Alter von $\nu + 1$ Jahren zugehört, „verglichen werden. (§. 54.)“

Denn jede $\mu + 1$ Klaftern des Waldbestandes a waren vor einem Jahre oder zu Ende des $(l - 1)$ ten Jahres μ Klaftern, also der Waldbestand $= \frac{\mu a}{m + 1}$. Da fer-

ner in dem $(l+1)$ ten Jahre jede $\mu+\sigma$ Klaftern zu $\mu+\sigma+1$ Klaftern werden, so ist zu Ende $(l+1)$ ten Jahres ein Waldbestand $= \frac{(\mu+\sigma+1) \cdot a}{\mu+\sigma}$ vorhanden. Es ge-

hören also die Waldbestände $\frac{\mu a}{\mu+1}$, a , $\frac{(\mu+\sigma+1) \cdot a}{\mu+\sigma}$ den Jahren $l-1$, l , $l+1$

zu. Man dividire nun jeden dieser Waldbestände durch die ihm zugehörigen Jahre, so entstehen folgende Verhältnisse

$$\frac{\mu a}{\mu+1} : (l-1) \text{ oder } 1) \mu a : (\mu+1)(l-1)$$

$$2) a : 1$$

$$\frac{(\mu+\sigma+1) \cdot a}{\mu+\sigma} : (\mu+1) \text{ oder } 3) (\mu+\sigma+1) \cdot a : (\mu+\sigma)(l+1).$$

Soll nun l das Alter der größten Schlagwürdigkeit seyn, so muß unter diesen drey Verhältnissen $a : 1$ das größte seyn.

$$\text{Es ist also } \frac{a}{1} > \frac{\mu a}{(\mu+1)(l-1)}$$

Man multiplicire diese Ungleichung durch $\frac{(\mu+1)(l-1) \cdot 1}{a}$ so wird

$$\frac{(\mu+1)(l-1) \cdot 1 \cdot a}{1a} > \frac{\mu a (\mu+1)(l-1) \cdot 1}{(\mu+1)(l-1) \cdot a}$$

$$\text{oder } (\mu+1)(l-1) > \mu l$$

$$\text{oder } \mu l + l - \mu - 1 > \mu l$$

$$\text{Daher } l > \mu + 1$$

$$\text{Ferner ist } \frac{a}{1} > \frac{(\mu+\sigma+1) \cdot a}{(\mu+1)(l+1)}$$

9D.

Man multiplicire durch $\frac{1}{a}$, so wird

$$1 > \frac{(\mu+\sigma+1) \cdot 1}{(\mu+\sigma)(l+1)}$$

Man multiplicire durch $(\mu + \sigma) \cdot (l + 1)$ so wird

$$(\mu + \sigma)(l + 1) > (\mu + \sigma + 1) \cdot l$$

$$\text{oder } \mu l + \sigma l + \mu + \sigma > \mu l + \sigma l + 1$$

Man ziehe auf beyden Seiten $\mu l + \sigma l$ ab, so bleibt

^{9E.}

$$1 < \mu + \sigma$$

3) Wenn also in dem l ten Jahre jede μ Klaftern, und in dem $(l + 1)$ ten Jahre jede $\mu + \sigma$ Klaftern 1 Klafter Zuwachs geben, und es befindet sich $l > \mu + 1$ und $l < \mu + \sigma$, so ist l das schlagwürdigste Alter des Forstes. Finden aber bey irgend einem Gesetze des Wachstums diese Gränzen nicht statt, so wird man umsonst das schlagwürdigste Alter suchen. Die Holznutzung wird dann desto gröfser seyn, je gröfser man den Zeitzwischenraum macht, der zwischen zwey Holzschläge fällt. Dieses soll gleich durch einige Beyspiele erläutert werden:

Erstes Beyspiel.

Wäre wie in No. XXV. λ das Gesetz des Wachstums, welches aber erst ϕ Jahre nach der Besamung zu gelten anfängt, so würden im l ten Jahre jede $(l - \phi)\lambda$ Klaftern, und im $(l + 1)$ ten Jahre jede $(l - \phi + 1)\lambda$ Klaftern eine Klafter Zuwachs geben. Soll nun l das schlagwürdigste Alter bedeuten, so muß

$$1) \quad l > (l - \phi) \lambda + 1$$

$$\text{und } 2) \quad l < (l - \phi) \lambda \text{ seyn.}$$

$$\text{Aus 1 folgt } l > l\lambda - \phi\lambda + 1$$

$$\text{und } \phi\lambda - 1 > l\lambda - l$$

$$\text{oder } \phi\lambda - 1 > (\lambda - 1)l$$

^{9F.}

$$\text{also } l < \frac{\phi\lambda - 1}{\lambda - 1}$$

$$\text{Aus 2 folgt } l < l\lambda - \phi\lambda + \lambda$$

$$\text{und } \phi\lambda - \lambda < l\lambda - l$$

$$\text{oder } (\phi - 1)\lambda < (\lambda - 1)l$$

^{9G.}

$$\text{also } l < \frac{(\phi - 1)\lambda}{\lambda - 1}$$

Ist hier $\lambda > 1$, so geben die Ungleichungen $^{\circ}F$ und $^{\circ}G$ die Gränzen an, zwischen welchen das schlagwürdigste Alter l für das angenommene Gesetz fällt. Ist aber λ ein ächter Bruch, so wird der Nenner $\lambda - 1$, und also auch die Gränzen negativ, wobey das schlagwürdigste Alter unbestimmt bleibt, und es steht in eines jeden Belieben, es so weit hinaus zu verschieben, als er für gut befindet.

Zweytes Beyspiel.

Wenn das Holz jährlich mit dem unveränderlichen Verhältnisse $m:1$ sein Wachstum erhält, so wird in 3 $\mu = m$ und $\sigma = 0$, also $l > m + 1$ und $l < m$.

Da beydes zugleich nicht statt finden kann, so giebt dies zu erkennen, daß für dieses Gesetz des Zuwachses der Forst desto mehr Ausbeute giebt, je größer der Zwischenraum zwischen jeden zwey Holzschlägen ist. Diesen Umstand hat Hr. von O. ganz aus den Augen gelassen und daher die nach §. 54. folgenden Paragraphen, die wir unberührt lassen, unbrauchbar gemacht.

Wir beendigen dieses Werk mit folgender Aufgabe.

Ein Forst hat, von der Zeit der Besamung an, in c Jahren den Betrag von a Klaftern erreicht, und erhält, in den darauf folgenden Jahren, seinen jährlichen Zuwachs nach dem Verhältniß $m:1$. Dieser Forst soll in gleichen Zeitzwischenräumen gänzlich abgeholzt, und gleich nachher wieder besäet werden. Wie groß muß dieser Zeitzwischenraum seyn, wenn man durch v dergleichen wiederholte Holzschläge eben so viel Holz erlangen will, als sich ein Forst zur Zeit des v ten Holzschlags befinden würde, wenn er bis dahin verschont geblieben wäre.

Auflösung.

Es müsse dieser Zwischenraum $c + x$ Jahre halten, so ist der jedesmahlige Holzschlag $= \left(\frac{m+1}{m}\right)^x \cdot a$ (nach der Formel D) und man erlangt durch v wiederholte Holzschläge $v \cdot \left(\frac{m+1}{m}\right)^x \cdot a$ Klaftern Holz.

Wäre nun der Forst $y \cdot (c+x)$ Jahre ungestört stehen geblieben, so würde er zu Ende dieser Jahre $\left(\frac{m+1}{m}\right)^{v(c+x)-c} \cdot a$ Klaftern Holz betragen, wenn das Holz diese ganze Zeit hindurch noch nach dem Verhältnisse $m:1$ seinen jährlichen Zuwachs erhält. Nun soll nach den Bedingungen der Aufgabe

$$v \cdot \left(\frac{m+1}{m}\right)^x \cdot a = (m+1)^{v(c+x)-c} \cdot a$$

seyn; daher wird, wenn man vorher durch a dividirt:

$$\log. v + x \cdot \log. \left(\frac{m+1}{m}\right) = (v \cdot (c+x) - c) \cdot \log. \left(\frac{m+1}{m}\right)$$

$$\text{und } (v(c+x) - c) \log. \left(\frac{m+1}{m}\right) - x \cdot \log. \left(\frac{m+1}{m}\right) = \log. v.$$

$$\text{oder } (vc + vx - c - x) \cdot \log. \left(\frac{m+1}{m}\right) = \log. v$$

$$\text{also } (vc + vx - c - x) = \frac{\log. v}{\log. \left(\frac{m+1}{m}\right)}$$

$$\text{oder } (v-1)x + (v-1)c = \frac{\log. v}{\log. \frac{m+1}{m}}$$

$$\text{also } x + c = \frac{\log. v}{(v-1) \log. \left(\frac{m+1}{m}\right)}.$$



**BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.**

Schellig, Karl Friedrich

Forst-Fragen als Entwicklungen und Beyträge zur Abtheilung der Gehölze in
jährliche Gehäue

Meissen 1799

4 Oecon. 316

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10229124-8

VD18 11600845